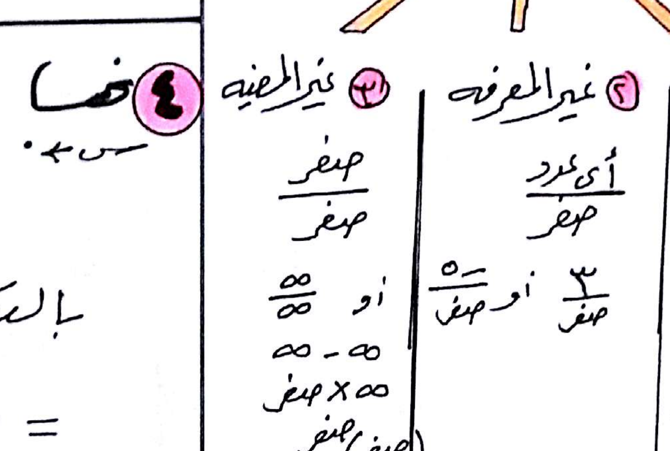

الأدهم
فى
تفاضل ومثلثات
الصف الثانى الثانوى
الترم الاول
٢٠١٨
اسم الطالب /
المدرســـة /
الفصـــل /
إعداد
أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الدرس الأول
إيجاد نهاية دالة بيانياً

في البداية لازم تفهم الفرق بين ٣ أنواع من الكميات وهم الكميات



① المعينة

- ٣
- ٥
- صفر
- $\frac{\text{صفر}}{7}$
- $\frac{\text{صفر}}{\text{أي عدد}} = \text{صفر}$
- $\text{ك}^{\text{ماعدا صفر}}$

② غير المعرفة

- $\frac{\text{أي عدد}}{\text{صفر}}$
- $\frac{3}{\text{صفر}}$ أو $\frac{-5}{\text{صفر}}$

③ غير المعينة

- $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$
- $\infty - \infty$
- $\text{صفر} \times \infty$
- $(\text{صفر})^{\text{صفر}}$
- $(\infty)^{\text{صفر}}$
- $(1)^{\infty}$

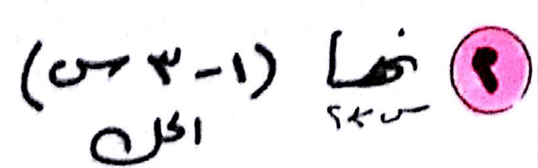
مثال ١ أوجد كلاً من النهايات التالية

① $\lim_{\text{س} \to 4} (2\text{س} - 5)$

الحل

بالتعويض المباشر

$\lim_{\text{س} \to 4} (2\text{س} - 5) = 2 \times 4 - 5 = 3$



② $\lim_{\text{س} \to 2} (1 - 3\text{س})$

الحل

بالتعويض المباشر $= 1 - 3 \times 2 = -5$

③ $\lim_{\text{س} \to 0} (\text{س}^2 - 2)$

الحل

بالتعويض المباشر $= (0)^2 - 2 = -2$

④ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{س} + 1}{\text{س} + 1}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{0 + 1}{0 + 1}$

$= \frac{1}{1} = 1$

⑤ $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س} - 2}{\text{س}}$

الحل

بالتعويض المباشر =

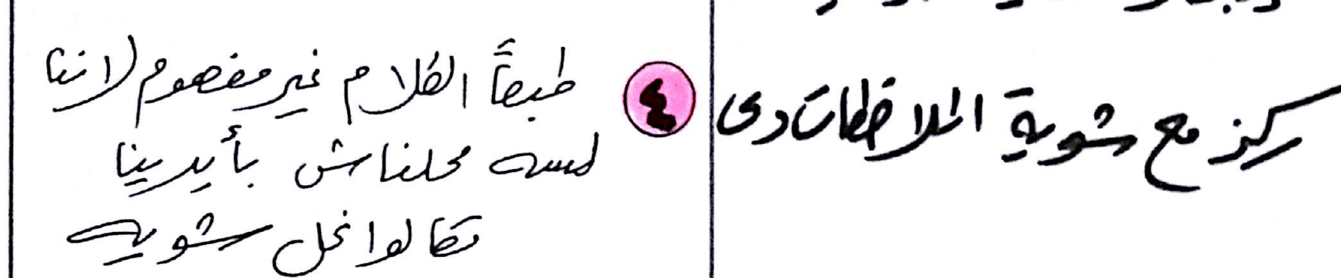
$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س} - 2}{\text{س}} = \frac{2 - 2}{2} = \frac{0}{2}$

$= \text{صفر}$

$\therefore \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س} - 2}{\text{س}} = \text{صفر}$

الفكرة الثانية

إيجاد النهاية بيانياً



ركز مع شوية الملاحظات دى

١) د(أ)⁺ = نهـا د(س) عندما س ← أ⁺
دى معناها النهاية اليمنى

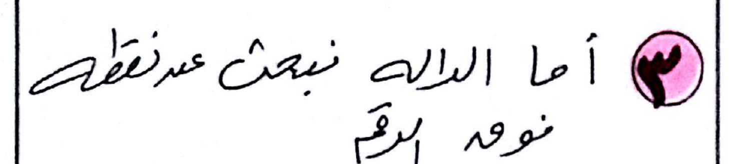
٢) د(أ)⁻ = نهـا د(س) عندما س ← أ⁻
دى معناها النهاية اليسرى

٣) د(أ) دى معناها دالة (أ)

سؤال مهم ازاى افرق بين النهاية وقيمة الدالة على الرسم

١) النهاية دايماً بنبحث عند خط على اليمين [النهاية اليمنى]

٢) أو خط على اليسار [من النهاية اليسرى]



٣) أما الدالة نبحث عند نقطة نوجد الرقم

٤) طبعاً الكلام غير مفهوم لانى لسه محلناش بأيدينا تعالوا نحل شوية

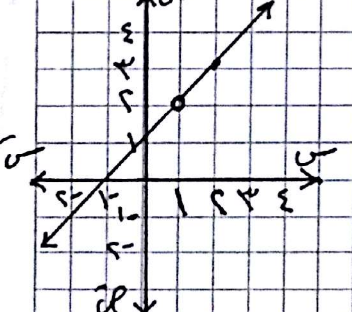
نسيت أقولك

إذا كانت النهاية اليمنى = النهاية اليسرى
تكون النهاية موجودة = الناتج

طيب لو ملم يساووا بعض
يبقى النهاية غير موجودة
لده تمام

مثال ٢

من الشكل المقابل اكمل

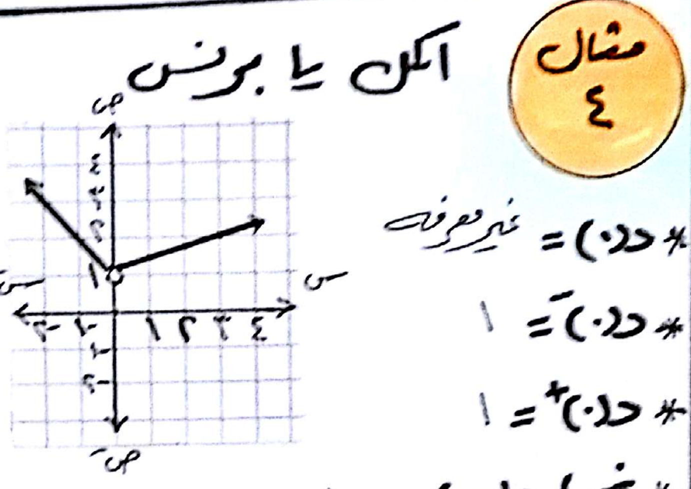


* د(١)⁺ = ٢
* د(١)⁻ = ٢
* نهـا د(س) عندما س ← ١ = ٢
* د(١) = غير معرفه [لأنه عندها ثقب ومفيش نقطة]
* د(٢) = ٣
* نهـا د(س) عندما س ← ٢ = ٣

مثال ٣ — أكمل ما يلي

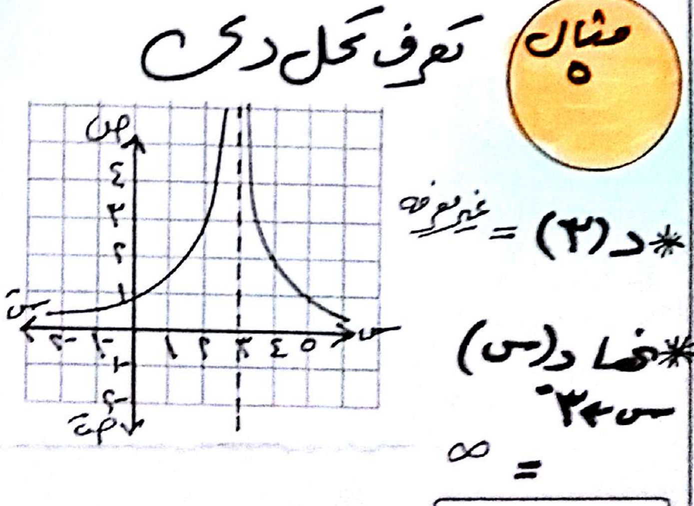
* $د(١) = ٤$
* $د(١)^{+} = ٣$
* $د(١)^{-} = ٢$
* $\lim_{س \to ١} د(س)$ = غير موجودة

مثال ٤ — أكمل يا برنس



* $د(٠)$ = غير معرفة
* $د(٠)^{-} = ١$
* $د(٠)^{+} = ١$
* $\lim_{س \to ٠} د(س) = ١$
* $د(٣) = ؟$
* $\lim_{س \to ٣} د(س) = ؟$

مثال ٥ — تعرف تحل دي



* $د(٣)$ = غير معرفة
* $\lim_{س \to ٣^{-}} د(س) = \infty$
* $\lim_{س \to ٣^{+}} د(س) = \infty$
* $\lim_{س \to ٣} د(س) = \infty$

مثال ٦ — من الشكل أكمل

* $د(٣)$ = غير معرفة
* $د(٣^{+}) = \infty$
* $د(٣^{-}) = -\infty$
* $\lim_{س \to ٣} د(س)$ = غير موجودة

لاحظ أن

الدالة يقال عنها غير معرفة.

والنهاية يقال عنها غير موجودة.

مثال ٧ — فكرة أعجبتني

ص ، ١٠ سم ، ١٠ سم ، θ

عندما $\theta \leftarrow \frac{\pi}{٢}$ ص ← نهاية ....

يعني المثلث هيكون قائم

ص هو الوتر

$ص = \sqrt{١٠^{٢} + ١٠^{٢}}$

$= ١٠\sqrt{٢}$ سم

أبو أدهم واحد بس

الدرس الثاني
إيجاد نهاية الدالة جبرياً

* ببساطة كدة هنتكلم عن أية الدرس دة ؟؟

هنجيب نهاية الدالة بالتعويض المباشر تمام ؟

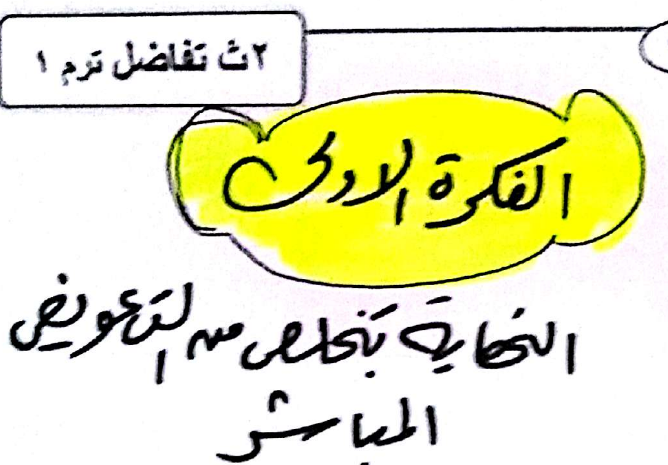
١ الحالة الأولى إذا أعطاني ناتج كمية معينة اكتبها وخلاص

طب كمية غير معروفة هنجيبها بعد ما نتعلم رسم الدوال في الجبر

٢ الحالة الثانية إذا كان كمية غير معينة هنعمل ٣ حاجات

$\frac{صفر}{صفر}$

- التحليل
- القسمة المطولة
- الضرب × المرافق





أوجد كلاً من النهايات التالية

١ $\lim_{س \to ٢} ٣ = ٣$

لأن الدالة ثابتة مفيش س أعوض فيها

٢ $\lim_{س \to ٠} (-٢) = -٢$

٣ $\lim_{س \to ١} ٤ = ٤$

٤ $\lim_{س \to ١} س^٢ - س + ٢$

الحل

$= (١)^٢ - (١) + ٢ = ١ - ١ + ٢ = ٢$

٥ $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س + ٢}$

الحل

$= \frac{٢ - ٢}{٢ + ٢} = \frac{٠}{٤} = صفر$

$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س + ٢} = صفر$

الفكرة الثانية
التحليل

مثال ٢ أوجد كلاً من النهايات التالية

١) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣}$

الحل

بالتعويض المباشر

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} = \frac{٣^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

كمية غير معينة

هنا نقوم بالتحليل

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)}$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} (\text{س} + ٣) = ٣ + ٣ = ٦$

٢) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{٢^٣ - ٨}{٤ - ١٠ + ٦} = \frac{٠}{٠}$

كمية غير معينة

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}{\text{س} - ٣} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢ - ٣}$

$\frac{١٢}{-١} = -١٢$

٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س} - ١)^٢ - ١}{٥\text{س}}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{(-١)^٢ - ١}{٥ \times ٠}$

$= \frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س} - ١)^٢ - ١}{٥\text{س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{٤\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١ - ١}{٥\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{٤\text{س}^٢ - ٤\text{س}}{٥\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}(٤\text{س} - ٤)}{٥\text{س}} = \frac{٤ \times ٠ - ٤}{٥}$

$= \frac{-٤}{٥}$

حل انت

١) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ١}$

٢) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} ٧$

٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + ٢)^٢ - ٤}{\text{س}^٢ + \text{س}}$

٤) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} + ٢}$

الفكرة الثالثة
القسمة المطولة

في النوع ده أنا هحل بطريقة
أحسن أحسها القسمة التركيبية
أحسن بكثير جداً من القسمة المطولة

مثال ٣ أوجد كلاً من النهايات التالية

(١) $\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 7س + 6}{3س^2 - 8س + 4}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{8 - 14 + 6}{12 - 16 + 4} = \frac{0}{0}$

كمية غير معينة بالقسمة على العامل الصفري $(س - 2)$

1	0	−7	6	← دي معاملات المقسوم
×××	2	4	−6	
1	2	−3	0	×2

$س^2 + 2س - 3$ ← خارج القسمة

كده خلصنا البسط

طيب والمقام $3س^2 - 8س + 4$

$س^2 - 8س + 12$

$(س - \frac{2}{3})(س - \frac{6}{3})$

$(س - 2) \quad (3س - 2)$

$= \lim_{س \to 2} \frac{(س - 2)(س^2 + 2س - 3)}{(س - 2)(3س - 2)}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س^2 + 2س - 3}{3س - 2} = \frac{4 + 4 - 3}{6 - 2}$

$\frac{5}{4}$

(٢) $\lim_{س \to -2} \frac{س^2 + 4س + 4}{س^3 + س^2 - 8س - 12}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{4 - 8 + 4}{-8 + 4 + 16 - 12} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to -2} \frac{(س + 2)(س + 2)}{(س + 2)(س^2 - س - 6)}$

$س^3$: 1	1	−8	−12	
↓	−2	+2	+12	
1	−1	−6	0	×(−2)

$س^2 - س - 6$

$= \lim_{س \to -2} \frac{س + 2}{س^2 - س - 6} = \frac{-2 + 2}{4 + 2 - 6} = \frac{0}{0}$

لسه مخلصتش

$= \lim_{س \to -2} \frac{(س + 2)}{(س + 2)(س - 3)}$

$= \lim_{س \to -2} \frac{1}{س - 3} = \frac{1}{-2 - 3} = \frac{1}{-5}$

$= \frac{-1}{5}$



نفس الجذر بس بتغيير الاشارة اللى بين الجذرين

مثال ٤ أوجد النهايات اللى جايه

(١) $$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{\sqrt{5-1}-2}{5-5} = \frac{0}{0}$

بالضرب × المرافق بسطاً ومقاماً

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \times \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}$$

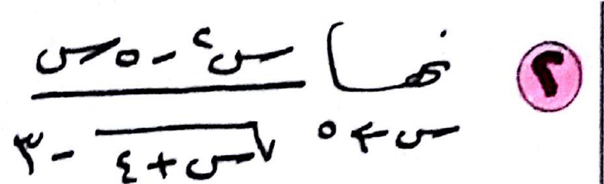
$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-1-4)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{1}{(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

(٢)



$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-5x}{\sqrt{x+4}-3}$$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{25-25}{\sqrt{9}-3} = \frac{0}{0}$

بالضرب × المرافق بسطاً ومقاماً

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x^2-5x}{\sqrt{x+4}-3} \times \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x(x-5) \times (\sqrt{x+4}+3)}{(x+4-9)}$$

$x+4-9 = x-5$

$$= \lim_{x \to 5} x(\sqrt{x+4}+3)$$

$$= 5(\sqrt{9}+3) = 5(3+3)$$

$$= 5 \times 6 = 30$$

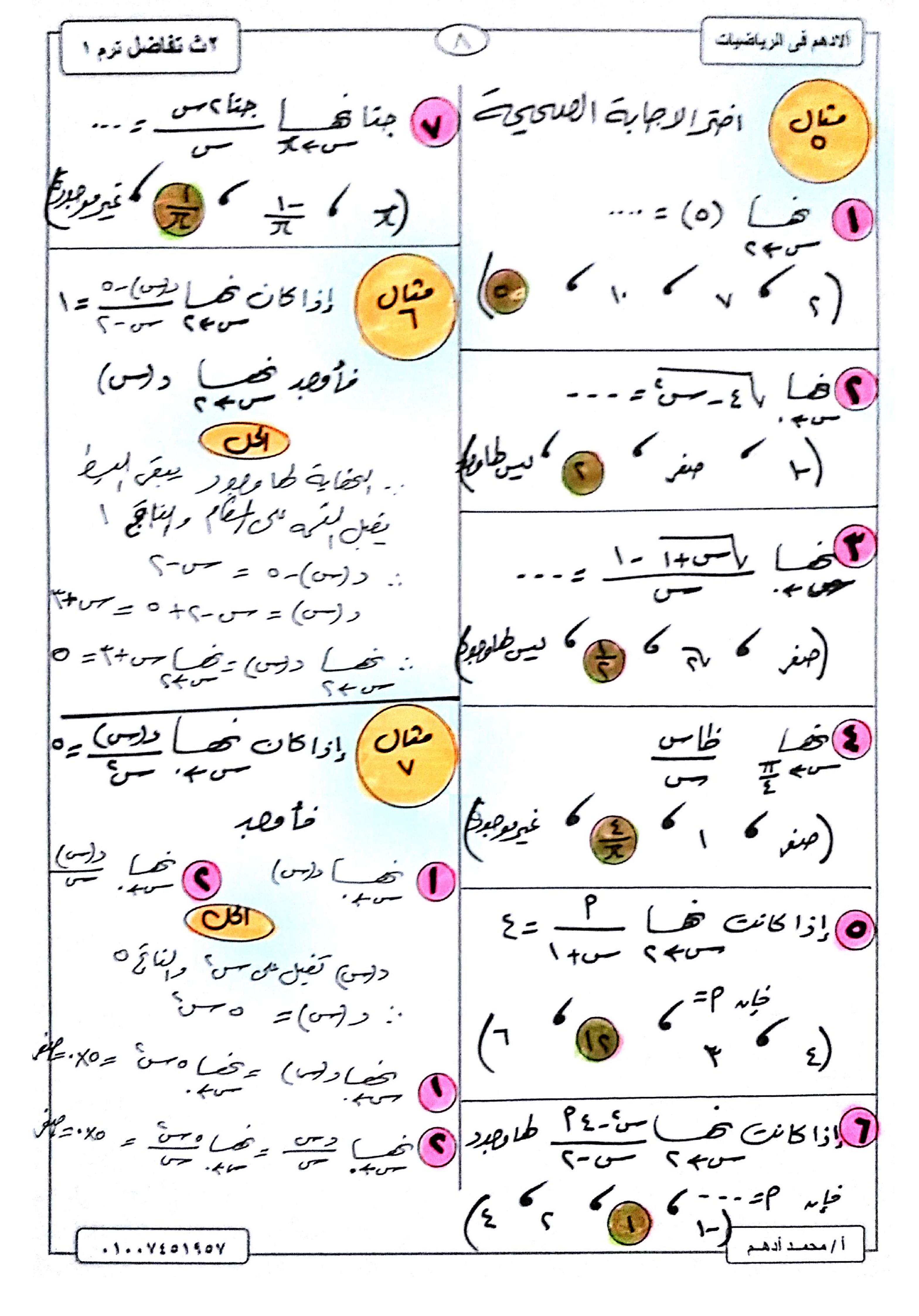
(٣) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}$$

الحل

بالتعويض $= \frac{2-2}{3-3} = \frac{0}{0}$

هنضرب × مرافق البسط ومرافق المقام

هى طويلة شوية حاول تكملها انت



مثال ٥

اختر الإجابة الصحيحة

(١) $\lim_{س \to ٢} (٥) = ...$

(٢ ، ٧ ، ١٠ ، ٥)

(٢) $\lim_{س \to ٠} \sqrt{٤ - س^٢} = ...$

(-٢ ، صفر ، ٢ ، ليس لها وجود)

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+١} - ١}{س} = ...$

(صفر ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، ليس لها وجود)

(٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظاس}{س}$

(صفر ، ١ ، $\frac{٤}{\pi}$ ، غير موجودة)

(٥) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{أ}{س+١} = ٤$ فإن أ =

(٤ ، ٣ ، ١٢ ، ٦)

(٦) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤أ}{س - ٢}$ لها وجود فإن أ = ...

(-١ ، ١ ، ٢ ، ٤)

(٧) جتا $\lim_{س \to \pi} \frac{جتا ٢س}{س} = ...$

(π ، $\frac{-١}{\pi}$ ، $\frac{١}{\pi}$ ، غير موجودة)

مثال ٦

إذا كان $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$

فأوجد $\lim_{س \to ٢} د(س)$

الحل

∵ النهاية لها وجود يبقى البسط يقبل القسمة على المقام والناتج ١

∴ $د(س) - ٥ = س - ٢$

$د(س) = س - ٢ + ٥ = س + ٣$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س) = \lim_{س \to ٢} (س + ٣) = ٥$

مثال ٧

إذا كان $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س^٢} = ٥$

فأوجد

(١) $\lim_{س \to ٠} د(س)$ (٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س}$

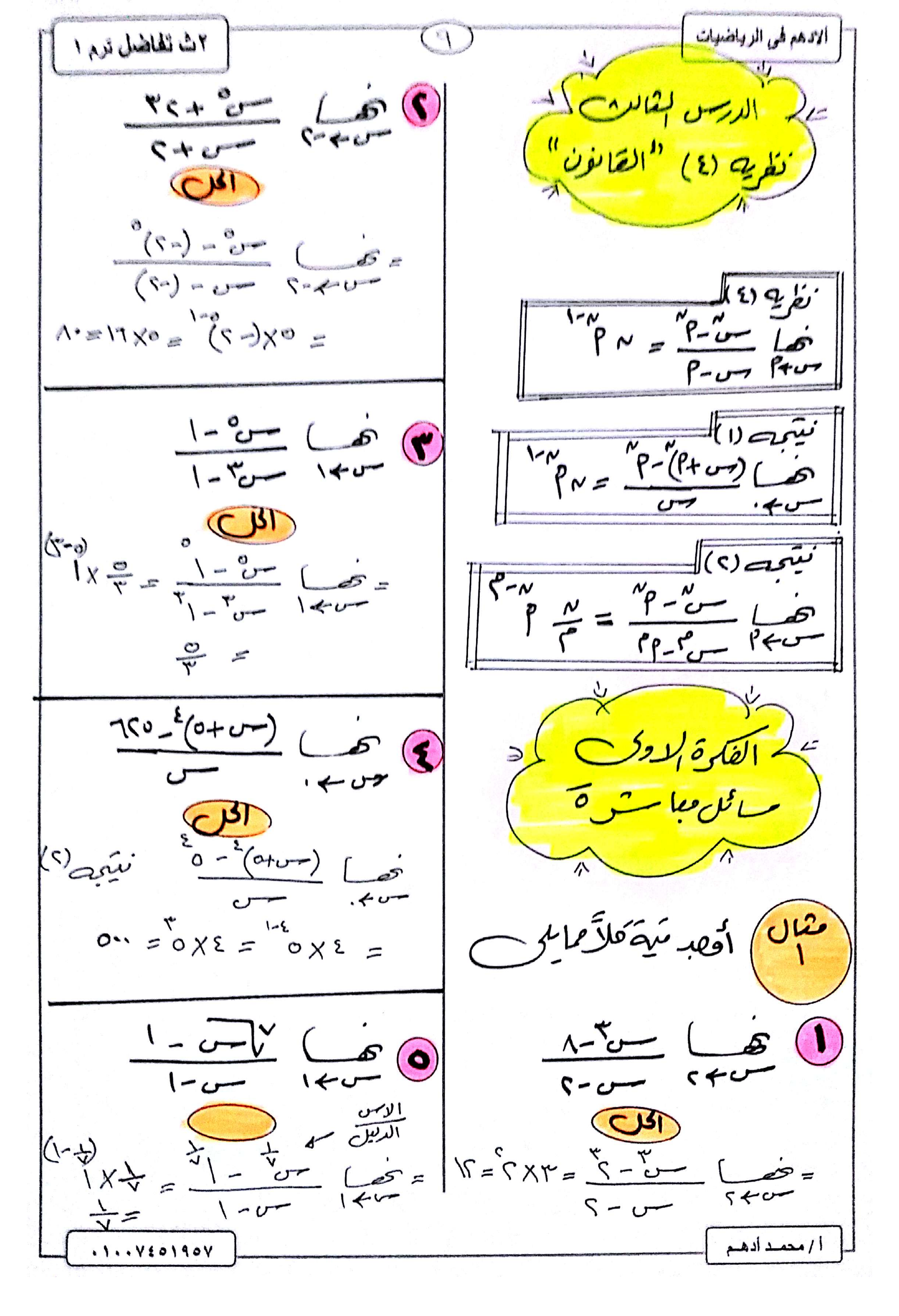
الحل

د(س) تقبل القسمة على $س^٢$ والناتج ٥

∴ $د(س) = ٥س^٢$

(١) $\lim_{س \to ٠} د(س) = \lim_{س \to ٠} ٥س^٢ = ٥ \times ٠ = صفر$

(٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٥س^٢}{س} = ٥ \times ٠ = صفر$



الدرس الثالث
نظرية (٤) "القانون"

نظرية (٤)

$$\lim_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-1}$$

نتيجة (١)

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-1}$$

نتيجة (٢)

$$\lim_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$$

الفكرة الأولى
مسائل مباشرة

مثال ١ أوجد قيمة كلاً مما يلي

١) $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^3 - 8}{\text{س} - 2}$

الحل

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^3 - 2^3}{\text{س} - 2} = 3 \times 2^2 = 12$

٢) $\lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^5 + 32}{\text{س} + 2}$

الحل

$= \lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^5 - (-2)^5}{\text{س} - (-2)}$

$= 5 \times (-2)^{5-1} = 5 \times 16 = 80$

٣) $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^5 - 1}{\text{س}^3 - 1}$

الحل

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^5 - 1^5}{\text{س}^3 - 1^3} = \frac{5}{3} \times 1^{(5-3)}$

$= \frac{5}{3}$

٤) $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{س}+5)^4 - 625}{\text{س}}$

الحل

$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{س}+5)^4 - 5^4}{\text{س}}$ نتيجة (٢)

$= 4 \times 5^{4-1} = 4 \times 5^3 = 500$

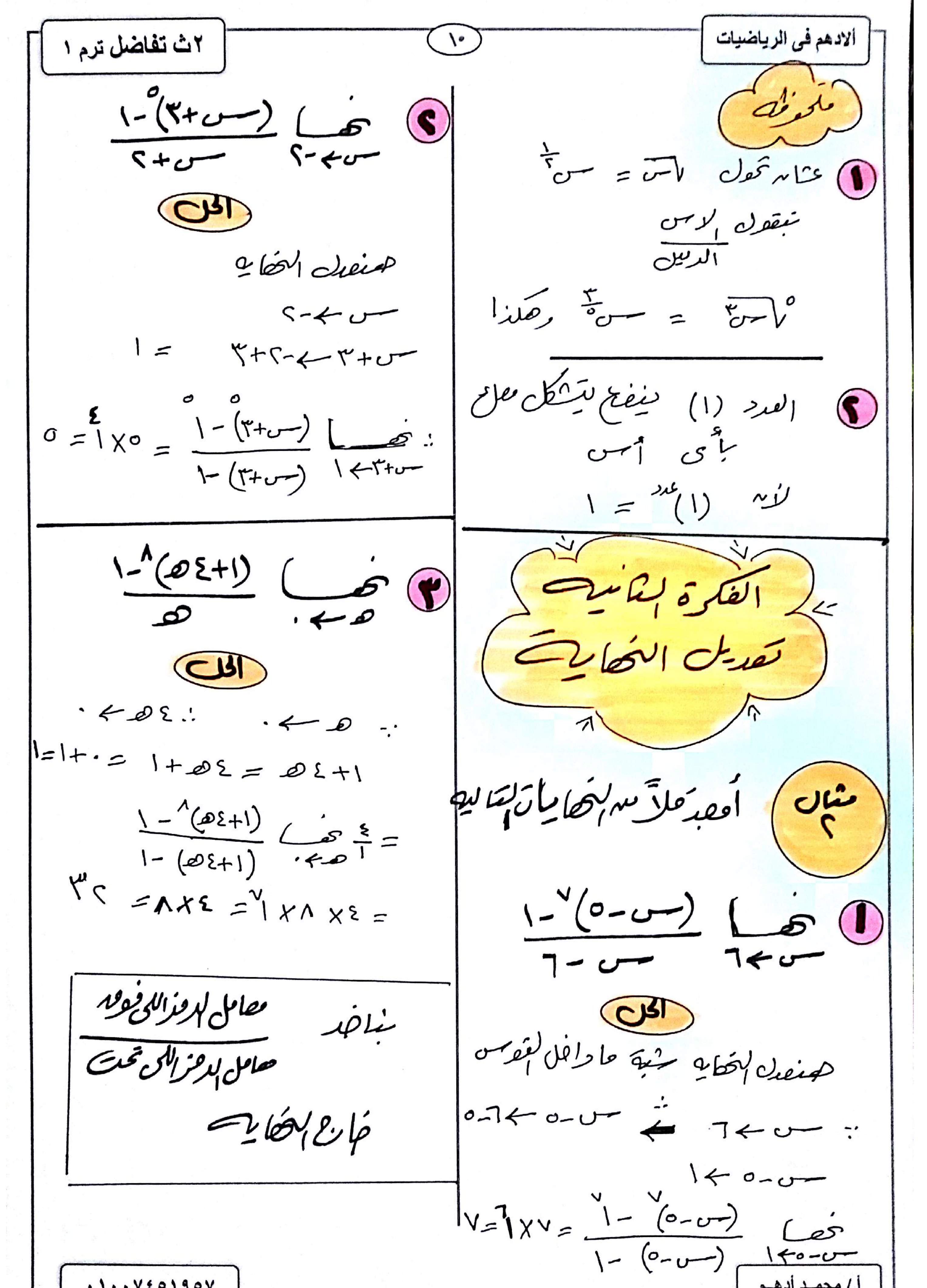
٥) $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt[7]{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1}$

الحل

الأس ← الدليل

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^{\frac{1}{7}} - 1^{\frac{1}{7}}}{\text{س} - 1} = \frac{1}{7} \times 1^{(\frac{1}{7}-1)}$

$= \frac{1}{7}$



ملحوظة

(١) عشان تحول $\sqrt{س} = س^{\frac{1}{2}}$

نبقول $\frac{\text{الأس}}{\text{الدليل}}$

$\sqrt[5]{س^3} = س^{\frac{3}{5}}$ وهكذا

(٢) العدد (١) بنفع نتشكل مع بأى أس

لأن $(1)^{\text{عدد}} = 1$

الفكرة الثانية

تعديل النهاية

مثال ٢ أوجد كلاً من النهايات التالية

(١) $\lim\limits_{س \to 6} \frac{(س-5)^7 - 1}{س - 6}$

الحل

هنعدل النهاية شبه ما داخل القوس

$\because س \to 6 \Leftarrow س-5 \to 6-5$

$س - 5 \to 1$

$\lim\limits_{س-5 \to 1} \frac{(س-5)^7 - 1^7}{(س-5) - 1} = 7 \times 1^6 = 7$

(٢) $\lim\limits_{س \to -2} \frac{(س+3)^5 - 1}{س + 2}$

الحل

هنعدل النهاية

$س \to -2$

$س + 3 \to -2 + 3 = 1$

$\therefore \lim\limits_{س+3 \to 1} \frac{(س+3)^5 - 1^5}{(س+3) - 1} = 5 \times 1^4 = 5$

(٣) $\lim\limits_{هـ \to 0} \frac{(1+4هـ)^8 - 1}{هـ}$

الحل

$\because هـ \to 0 \quad \therefore 4هـ \to 0$

$1 + 4هـ = 4هـ + 1 = 0 + 1 = 1$

$= \frac{4}{1} \lim\limits_{4هـ \to 0} \frac{(1+4هـ)^8 - 1}{(1+4هـ) - 1}$

$= 4 \times 8 \times 1^7 = 4 \times 8 = 32$

نلاحظ $\frac{\text{معامل الرمز اللى فوق}}{\text{معامل الرمز اللى تحت}}$

خارج النهاية

٤ $\lim\limits_{س \to 7} \dfrac{\sqrt[5]{س+25} - 2}{س - 7}$

الحل

$= \lim\limits_{س \to 7} \dfrac{(س+25)^{\frac{1}{5}} - 2}{س - 7}$

بفرض $س + 25 \leftarrow -7 + 25$

$س + 25 \leftarrow 32$

$\therefore \lim\limits_{س+25 \to 32} \dfrac{(س+25)^{\frac{1}{5}} - 32^{\frac{1}{5}}}{(س+25) - 32}$

$= \frac{1}{5} \times (32)^{\frac{1}{5} - 1} = \frac{1}{80}$

---

٥ $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{(أ+2س)^6 - أ^6}{5س}$

الحل

$\because س \to 0 \quad \therefore 2س \to 0$

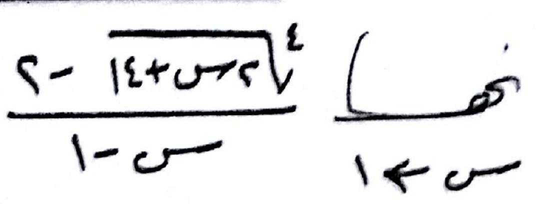
$أ + 2س \leftarrow أ$

نضاعف معامل $\dfrac{\text{س فوق}}{\text{س تحت}}$ خارج النهاية

$\frac{2}{5} \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{(أ+2س)^6 - أ^6}{(أ+2س) - أ}$

$\frac{2}{5} \times 6 \times أ^{6-1} = \frac{12}{5} أ^5$

---

٦ 

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{2س+14} - 2}{س - 1}$

الحل

بفرض $\because س \to 1 \quad \therefore 2س \to 2$

$2س + 14 \leftarrow 16$

منضبش ناخذ $\dfrac{\text{المعامل}}{\text{معامل}}$ خارج نها

$\frac{2}{1} \lim\limits_{2س+14 \to 16} \dfrac{(2س+14)^{\frac{1}{4}} - 16^{\frac{1}{4}}}{(2س+14) - 16}$

$= 2 \times \frac{1}{4} \times (16)^{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{16}$



مثال ٣ إذا كان $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س^ن - 64}{س - 2} = ل$

فأوجد قيمتي ن ، ل

الحل

$\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س^ن - 2^6}{س - 2} = \lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س^6 - 2^6}{س - 2}$

$= 6 \times 2^{6-1} = 6 \times 2^5 = 192$

$\therefore ن = 6$ ، $ل = 192$

نتكلم جد شوية بقى
يا جماعة...يجب وضع
مادة فى الدستور تتيح
للزمالك الفوز على الأهلى
مرة كل ١٠ سنوات

الفكرة الثالثة
تقييم النهاية الى نهايتين

مثال ٤ أوجد كلاً من النهايات التالية

(١) $\lim_{س \to -2} \frac{(س+3)^5 - 1}{س^2 - 4}$

الحل

$= \lim_{س \to -2} \frac{(س+3)^5 - 1}{(س-2)(س+2)}$

$= \lim_{س \to -2} \frac{1}{س-2} \times \lim_{س \to -2} \frac{(س+3)^5 - 1}{س+2}$

$\frac{1}{-2-2} \times \lim_{س+3 \to 1} \frac{(س+3)^5 - 1^5}{(س+3) - 1}$

$= \frac{1}{-4} \times 5 \times 1^4 = \frac{-5}{4}$

---

(٢) $\lim_{س \to 2} \frac{س^5 - 32}{س^2 + 3س - 10}$

الحل

$= \lim_{س \to 2} \frac{س^5 - 32}{(س+5)(س-2)}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{1}{س+5} \times \lim_{س \to 2} \frac{س^5 - 32}{س-2}$

$\frac{1}{7} \times \lim_{س \to 2} \frac{س^5 - 2^5}{س-2}$

$= \frac{1}{7} \times 5 \times 2^4 = \frac{80}{7}$

---

(٣) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س+4} - 2}{س^2 + س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س+4} - 2}{س(س+1)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{س+1} \times \lim_{س \to 0} \frac{(س+4)^{\frac{1}{2}} - 2}{س}$

$\frac{1}{1} \times \lim_{س+4 \to 4} \frac{(س+4)^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{2}}}{(س+4) - 4}$

$= 1 \times \frac{1}{2} \times (4)^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{4}$

ويمكن حلها بالضرب × المرافق

---

(٤) $\lim_{س \to -2} \frac{س^7 + 128}{3س^4 - 48}$

الحل

$\lim_{س \to -2} \frac{س^7 + 128}{3(س^4 - 16)}$

$= \frac{1}{3} \lim_{س \to -2} \frac{س^7 - (-2)^7}{س^4 - (-2)^4}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} \times (-2)^{7-4}$

$\frac{1}{3} \times \frac{7}{4} \times -8 = \frac{-14}{3}$



مثال ٥ أكمل ما يلي

① $\lim_{س \to م} \frac{س^{٧} - م^{٧}}{س - م} = ٧ م^{٦}$

② $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س} - \sqrt{٢}}{س - ٢} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{\frac{١}{٢}} - ٢^{\frac{١}{٢}}}{س - ٢} = \frac{١}{٢} × ٢^{\frac{١}{٢} - ١}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^{٥} - ١}{س} = ٥ × ١^{٤} = ٥$

④ إذا كان $\lim_{س \to ل} \frac{س^{٥} - ل^{٥}}{س - ل} = ٨٠$

فإن ل = ...

$٥ ل^{٤} = ٨٠ \quad ل^{٤} = ١٦$

$ل = \pm \sqrt[٤]{١٦} = \pm ٢$

⑤ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{م} - س^{هـ}}{س^{م} - س^{ء}} = \frac{م - هـ}{م - ء}$



مثال ٦ أوجد قيمة م إذا كانت

$\lim_{س \to م} \frac{س^{١٢} - م^{١٢}}{س^{١٠} - م^{١٠}} = ٣٠$

الحل

$\frac{١٢}{١٠} م^{١٢ - ١٠} = ٣٠$

$\frac{١٢}{١٠} م^{٢} = ٣٠$

$\therefore م^{٢} = ٣٠ × \frac{١٠}{١٢} = \frac{٣٠٠}{١٢} = ٢٥$

$\therefore م = \pm ٥$



مثال ٧ إذا كانت $د(س) = \frac{١}{س^{٤}}$

أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢}$

الحل

$د(س) = س^{-٤} \qquad د(٢) = ٢^{-٤}$

$\therefore$ المقدار $= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٤} - ٢^{-٤}}{س - ٢}$

$= (-٤) × (٢)^{-٤ - ١} = -٤ × ٢^{-٥}$

$= \frac{-٤}{٣٢} = \frac{-١}{٨}$



الدرس الرابع
نهاية الدالة عند اللانهاية

نظرية (٥)

$$\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} = \text{صفر}$$

ملاحظات هامة قوي

1. $\infty \times \text{عدد} = \infty$
2. $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$
3. $\infty \pm \text{عدد} = \infty$
4. $\text{عدد} - \infty = -\infty$
5. $\text{عدد} \times -\infty = -\infty$ ← عدد موجب
6. $\infty + \infty = \infty$
7. $\infty \times \infty = \infty$
8. $(\infty)^n = \infty$ بشرط $n \neq 0$
9. $\infty - \infty$ ← كمية غير معينة
10. $\frac{\infty}{\infty}$ ← كمية غير معينة
11. $\infty \times \text{صفر}$ ← كمية غير معينة
12. $(\infty)^{\text{صفر}}$ ← كمية غير معينة



مثال ١ أوجد كلاً مما يأتي

(١) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{1}{س} + 2\right)$

الحل

هنقسم النهايات

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} + \lim_{س \to \infty} 2$$

$$\text{صفر} + 2 = 2$$

(٢) $\lim_{س \to \infty} \left(5 - \frac{1}{س^2}\right)$

الحل

$$\lim_{س \to \infty} 5 - \lim_{س \to \infty} \frac{1}{س^2}$$

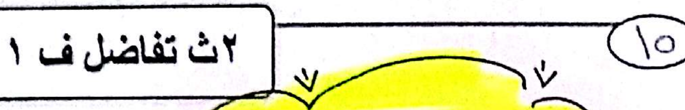
$$5 - \text{صفر} = 5$$

(٣) $\lim_{س \to \infty} \left(5س - س^2 + 7\right)$

الحل

هناخد اكبر أس عامل مشترك

$$\lim_{س \to \infty} س^2 \left(\frac{5س}{س^2} - \frac{س^2}{س^2} + \frac{7}{س^2}\right)$$



$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ س^{٢}\left(\frac{٥}{س} - ١ + \frac{٧}{س^{٢}}\right)$

$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ س^{٢} \times \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\left(\frac{٥}{س} - ١ + \frac{٧}{س^{٢}}\right)$

$= (\infty)^{٢} \times -١ = -\infty$

---

٤ $\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\left(س^{٣} + ٧س^{٢} + ٢\right)$

الحل

هناخذ $س^{٣}$ عامل مشترك

$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ س^{٣}\left(\frac{س^{٣}}{س^{٣}} + \frac{٧س^{٢}}{س^{٣}} + \frac{٢}{س^{٣}}\right)$

$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ س^{٣} \times \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\left(١ + \frac{٧}{س} + \frac{٢}{س^{٣}}\right)$

$= (\infty)^{٣} \times ١ = \infty$

---

٥ $\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\left(٣س^{-٥} + ٤س^{-٢} + ١\right)$

الحل

$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\left(\frac{٣}{س^{٥}} + \frac{٤}{س^{٢}} + ١\right)$

$=$ صفر $+$ صفر $+ ١ = ١$

---

* أي حاجة مقامها س = صفر

في مسائل النها لانهاية



هنقسم على اكبر أس في المقام

مثال ١ $\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{٢س - ٥}{٣س + ٧}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{\frac{٢س}{س} - \frac{٥}{س}}{\frac{٣س}{س} + \frac{٧}{س}}$

$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{٢ - \frac{٥}{س}}{٣ + \frac{٧}{س}} = \frac{٢ - ٠}{٣ + ٠} = \frac{٢}{٣}$

---

٢ $\underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{٢س^{٢} + ٥س + ١}{٣س^{٢} + ٨س - ٣}$

الحل

بالقسمة على $س^{٢}$ بسطاً ومقاماً

$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{\frac{٢س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٥س}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٢}}}{\frac{٣س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٨س}{س^{٢}} - \frac{٣}{س^{٢}}}$

$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{٢ + \frac{٥}{س} + \frac{١}{س^{٢}}}{٣ + \frac{٨}{س} - \frac{٣}{س^{٢}}} = \frac{٢}{٣}$

٣) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥\text{س}^{٧} + ٢\text{س} - ١}{٦\text{س}^{٤} + ١٣}$

الحل

بالقسمة على $\text{س}^{٤}$ فوق وتحت

$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٥\text{س}^{٧}}{\text{س}^{٤}} + \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٤}} - \frac{١}{\text{س}^{٤}}}{\frac{٦\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٤}} + \frac{١٣}{\text{س}^{٤}}}$

$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥\text{س}^{٣} + \frac{٢}{\text{س}^{٣}} - \frac{١}{\text{س}^{٤}}}{٦ + \frac{١٣}{\text{س}^{٤}}}$

$= \frac{٥(\infty)^{٣}}{٦} = \infty$

٤) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٧\text{س}^{٢} + ١}{٤\text{س}^{٣} - ٨\text{س} + ١}$

الحل

بالقسمة على $\text{س}^{٣}$ فوق وتحت

$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٧\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}}{\frac{٤\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣}} - \frac{٨\text{س}}{\text{س}^{٣}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}}$

$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٧}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}}{٤ - \frac{٨}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}}$

$= \frac{٠ + ٠}{٤ - ٠} = \frac{\text{صفر}}{٤} = \text{صفر}$



١) إذا كانت درجة البسط = درجة المقام

يبقى الناتج = $\frac{\text{معامل س بسط}}{\text{معامل س مقام}}$ الأكبر أس

٢) إذا كانت درجة البسط أكبر من المقام

يبقى الناتج = ∞ أو $-\infty$

٣) إذا كانت درجة البسط أقل من المقام

يبقى الناتج = صفر

٤) إذا كانت $\text{س} \to \infty$

فإن $\sqrt{\text{س}^{٢}} = |\text{س}| = \text{س}$

$= \sqrt[٣]{\text{س}^{٣}} = \sqrt[٧]{\text{س}^{٧}} = ...$

الفكرة الثالثة
الأقواس والجذور

مثال ٣

أوجد كلاً من النهايات دى

١) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + ١)}{\text{س}^{٢}(٥\text{س} - ١)}$

هنقسم على $\text{س}^٣$ لأن $\text{س}^٢ \times \text{س}$

القوس اللى جواه س هنقسم على س

و اللى جواه $\text{س}^٢$ هنقسم على $\text{س}^٢$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(\frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}}\right)\left(\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)}{\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢}\left(\frac{٥\text{س}}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}}\right)}$$

$$= \frac{(١-٠)\times(١+٠)}{(٥-٠)\times ١} = \frac{١}{٥}$$

---

٢ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{س}+٢)^٣(٣-٢\text{س}^٢)}{٣\text{س}(\text{س}^٤+٧)^٢}$

الحل

هنقسم على $\text{س}^٥ = \text{س}^٣ \times \text{س}^٢$

$= \text{س} \times \text{س}^٤$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}}\right)^٣\left(\frac{٣}{\text{س}^٢} - \frac{٢\text{س}^٢}{\text{س}^٢}\right)}{\frac{٣\text{س}}{\text{س}}\left(\frac{\text{س}^٤}{\text{س}^٢} + \frac{٧}{\text{س}^٢}\right)^٢}$$

$$= \frac{(١+٠)^٣(٠-٢)}{٣(١+٠)} = \frac{١\times -٢}{٣\times ١}$$

$$= \frac{-٢}{٣}$$

---

٣ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س} + ٥}{(٢\text{س} - ١)^٣}$

الحل

هنقسم على $(\text{س})^٣$ فموحد $\text{س}^٣$

وداخل الأقواس س

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{\text{س}^٣}{\text{س}^٣} - \frac{٤\text{س}}{\text{س}^٣} + \frac{٥}{\text{س}^٣}}{\left(\frac{٢\text{س}}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}}\right)^٣}$$

$$= \frac{١ - ٠ + ٠}{(٢-٠)^٣}$$

$$= \frac{١}{(٢)^٣} = \frac{١}{٨}$$

---

٤ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٤ - ٣\text{س}^٣}{\sqrt{\text{س}^٦ + ٩}}$

الحل

لاحظ $\sqrt{\text{س}^٦} = \text{س}^{\frac{٦}{٢}} = \text{س}^٣$

يعنى تحت الجزر نقسم على $\text{س}^٦$

وخارج الجزر على $\text{س}^٣$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٤}{\text{س}^٣} - \frac{٣\text{س}^٣}{\text{س}^٣}}{\sqrt{\frac{\text{س}^٦}{\text{س}^٦} + \frac{٩}{\text{س}^٦}}}$$

$$= \frac{٠ - ٣}{\sqrt{١ + ٠}} = \frac{-٣}{\sqrt{١}} = -٣$$

---

٥ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}} \sqrt{٣ + ٤\text{س}^٢}$

الحل

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{٣ + ٤\text{س}^٢}}{\text{س}}$$

بالقسمة على س = $\sqrt{س^2}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{٣}{س^2} + \frac{٤س^2}{س^2}}}{\frac{س}{س}}$$

$$= \frac{\sqrt{٠ + ٤}}{١} = \frac{\sqrt{٤}}{١} = ٢$$

---

٦ $\lim_{س \to \infty} \left(٤^{\frac{١}{س}} - \frac{س}{٢س - ١} \right)$

الحل

$$= \lim_{س \to \infty} ٤^{\frac{١}{س}} - \lim_{س \to \infty} \frac{س}{٢س - ١}$$

$$= (٤)^{٠} - \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{س}{س}}{\frac{٢س}{س} - \frac{١}{س}}$$

$$١ - \frac{١}{٢ - ٠} = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

---

٧ $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^{-٣} + ٤س^{-٢} - ٣}{٧س^{-٣} - ٢س^{-٢} + ٨}$

الحل

اتنبه يا دكتور اتنبه يا متر

اتنبه يا معلم

اتنبه يا حاجة

الاس السالب بنقلب الكسر بتاعه عشان نحوله إلى موجب وخلاص

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٥}{س^3} + \frac{٤}{س^2} - ٣}{\frac{٧}{س^3} - \frac{٢}{س^2} + ٨}$$

وعوض أي حاجة مقامها س تبقى صفر

$$= \frac{٠ + ٠ - ٣}{٠ - ٠ + ٨} = \frac{-٣}{٨}$$

مثال ٤

لما تلاقي جذور ومفيش بسط ومقام نضرب × المرافق

١ $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 - س + ١} - \sqrt{س^2 + س + ١} \right)$

الحل

$$= \lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 - س + ١} - \sqrt{س^2 + س + ١} \right) \times \frac{\sqrt{س^2 - س + ١} + \sqrt{س^2 + س + ١}}{\sqrt{س^2 - س + ١} + \sqrt{س^2 + س + ١}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{(س^2 - س + ١) - (س^2 + س + ١)}{\sqrt{س^2 - س + ١} + \sqrt{س^2 + س + ١}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-٢س}{\sqrt{س^2 - س + ١} + \sqrt{س^2 + س + ١}}$$

بالقسمة على $\sqrt{س^2} = س$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{-٢س}{س}}{\sqrt{\frac{س^2}{س^2} - \frac{س}{س^2} + \frac{١}{س^2}} + \sqrt{\frac{س^2}{س^2} + \frac{س}{س^2} + \frac{١}{س^2}}}$$

$$= \frac{-٢}{\sqrt{١} + \sqrt{١}} = \frac{-٢}{١ + ١} = \frac{-٢}{٢}$$

$$= -١$$

علمى بس



نظرية إذا كانت س بالدائرى

① $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$

② $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا م س}}{\text{ن س}} = \dfrac{\text{م}}{\text{ب}}$

③ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظاس}}{\text{س}} = ١$

④ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا م س}}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{م}}{\text{ب}}$

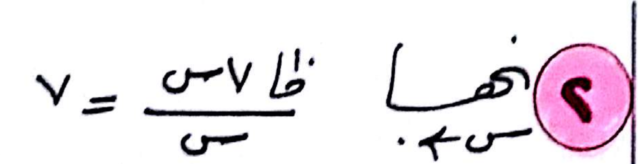
** $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}} = \text{صفر}$

على فكرة $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \text{جتاس} = ١$

الفكرة الأولى
مسائل مباشرة وسهلة

مثال ١ أوجد كلاً من النهايات التالية

① $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا٣س}}{٥\text{س}} = \dfrac{٣}{٥}$



② $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا٧س}}{\text{س}} = ٧$

③ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا٣س}^2}{٥\text{س}^2} = \dfrac{٣}{٥}$

④ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا٥س}}{٢\text{جا٣س}}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$= \dfrac{١}{٢} \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{جا٥س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا٣س}}{\text{س}}}$

$= \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{٥}{٣} = \dfrac{٥}{٦}$

⑤ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} ٣\text{س قتا٢س}$

الحل

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} ٣\text{س} \times \dfrac{١}{\text{جا٢س}}$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س}}{\text{جا٢س}}$ ÷ (س)

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{٣\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}} = \dfrac{٣}{٢}$

⑥ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا٢س ظا٣س}}{٤\text{س}^2}$

$= \frac{١}{٤} \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{\text{جا ٢س}}{\text{س}} \times \frac{\text{ظا ٣س}}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^٤}{\text{س}^٤}}$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٢ \times ٣}{١} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

---

٧ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}^٢ \text{٣س}}{\text{٥س}^٢}$

الحل

$= \frac{١}{٥} \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\left(\frac{\text{جا ٣س}}{\text{س}}\right)^٢}{\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢}}$

$\frac{١}{٥} \times \frac{٣^٢}{١} = \frac{٩}{٥}$

---

٨ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س ظا ٢س}}{\text{س}^٢ + \text{جا}^٢ \text{٣س}}$

الحل

بالقسمة على $\text{س}^٢ = \text{س} \times \text{س}$

$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢} + \left(\frac{\text{جا ٣س}}{\text{س}}\right)^٢}$

$= \frac{١ \times ٢}{١ + (٣)^٢} = \frac{٢}{١ + ٩} = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$

---

٩ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س} + \text{س جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$

الحل

بالقسمة على س

لاحظ أنه جتا مش محتاجة مقام

$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{س جتا س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا س}}{\text{س}} \text{ جتا س}}$

$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١ + \text{جتا س}}{\frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \text{جتا س}}$

$= \frac{١ + ١}{١ \times ١} = \frac{٢}{١} = ٢$

---

١٠ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{٣(١ - \text{جتا س})}{\text{س}}$

الحل

$= ٣ \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(١ - \text{جتا س})}{\text{س}}$

$= ٣ \times \text{صفر} = \text{صفر}$

---

١١ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جتا س} - ١}{\text{جا س}}$

الحل

بالقسمة على س فوق وتحت

$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{\text{جتا س} - ١}{\text{س}}}{\frac{\text{جا س}}{\text{س}}}$

$= \frac{\text{صفر}}{١} = \text{صفر}$

---

١٢ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{٢ - \text{جتا ٣س} - \text{جتا ٤س}}{\text{س}}$

الحل

فى الصفحة الجاية

العدد ٢ ضخليه ١+١
ركز وانت تفهم

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(١ - \text{جتا}٣\text{س}) + (١ - \text{جتا}٤\text{س})}{\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \left(\frac{١ - \text{جتا}٣\text{س}}{\text{س}}\right) + \lim_{\text{س}\to ٠} \left(\frac{١ - \text{جتا}٤\text{س}}{\text{س}}\right)$$

$$= ٣ \lim_{٣\text{س}\to ٠} \left(\frac{١ - \text{جتا}٣\text{س}}{٣\text{س}}\right) + ٤ \lim_{٤\text{س}\to ٠} \left(\frac{١ - \text{جتا}٤\text{س}}{٤\text{س}}\right)$$

$$= ٣ \times ٠ + ٤ \times ٠ = \text{صفر}$$

---

٣ $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س} - \text{س جتاس}}{\text{جا}^٢ ٣\text{س}}$

الحل

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س}(١ - \text{جتاس})}{\text{جا}^٢ ٣\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\frac{\text{س}(١ - \text{جتاس})}{\text{س}^٢}}{\frac{\text{جا}^٢ ٣\text{س}}{\text{س}^٢}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\left(\frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}}\right)}{\left(\frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{س}}\right)^٢}$$

$$= \frac{\text{صفر}}{٩} = \text{صفر}$$

تذكران

١) $\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} = ١$

٢) $١ + \text{ظا}^٢\text{س} = \text{قا}^٢\text{س}$

٣) $١ + \text{ظتا}^٢\text{س} = \text{قتا}^٢\text{س}$

افتكر كويس المعلومة دي

١) $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}} = \text{صفر}$

٢) ولكن $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^٢}$

نضرب × المرافق

---

١٤ $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^٢}$

الحل

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \left(\frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^٢} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}\right)$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \left(\frac{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}{\text{س}^٢(١ + \text{جتاس})}\right)$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{س}^٢(١ + \text{جتاس})}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{س}^٢} \times \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{١}{١ + \text{جتاس}}$$

$$١ \times \frac{١}{١+١} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

بصراحة مش عارف مين غيري
كنتوا هتعملوا أيه؟

الفكرة الثانية
هنعمل شوية فى النهاية

تذكر

١) $\text{جاس} = \text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})$

٢) $\text{جتاس} = \text{جا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})$

٣) $\text{ظاس} = \text{ظتا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})$

٤) $\text{جا}(\pi - \text{س}) = \text{جاس}$

٥) $\text{ظا}(\pi - \text{س}) = -\text{ظاس}$

٦) إذا كانت $\text{س} \to \infty$ ∴ $\frac{1}{\text{س}} \to$ صفر

مثال ٢ أوجد قيمة كلاً مما يلي

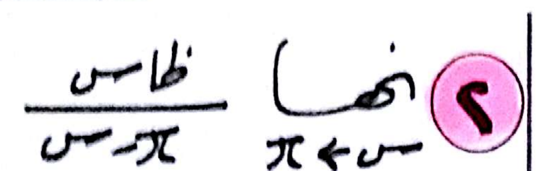
١) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(٣\text{س} - ١٢)}{\text{س} - ٤}$

الحل

∵ س ← ٤ ∴ س − ٤ ← ٠

$= \underset{\text{س}-٤ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٣(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)} = ٣$

اعتبرها $\underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٣\text{ص}}{\text{ص}} = ٣$



٢) $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}}{\pi - \text{س}}$

الحل

∵ س ← π ∴ π − س ← ٠

$= \underset{\pi - \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-\text{ظا}(\pi - \text{س})}{(\pi - \text{س})}$

$= -١$

٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})}$

الحل

∵ $\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \text{س}) = \text{جاس}$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جاس}} = ١$

٤) $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} - \pi}{\text{جتاس}}$

الحل

$= \underset{\text{س} \to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{-(\pi - ٢\text{س})}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})}$

$= \underset{\frac{\pi}{2} - \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٢(\frac{\pi}{2} - \text{س})}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})}$

$= -٢$

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ س جا س$^{-1}$

الحل

∵ س ← ∞

بوضع $\frac{1}{س}$ ← صفر

$\underset{\frac{1}{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} \frac{1}{س}}{\frac{1}{س}}$ ← مقام المقام بسط

$= ١$

آخر مكشوفة

إذا كانت س بالقياس الستيني فإنه

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

② $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

** لسة فاكر إنه

القياس الدائرى = الستينى × $\frac{\pi}{١٨٠}$

مثال ٣ أكمل الجمل اللى جاية

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٥س}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{صفر}}{١} = \text{صفر}$

تعويض مباشر وتذكر أنه جتا مش محتاجه مقام

② $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}}{س} = \frac{١}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٤}{\pi}$

③ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ جتا٥س = جتا٠ = ١

④ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}$ جا س = جا٩٠° = ١

⑤ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س-٥)}{٣(س-٥)} = \frac{١}{٣}$

⑥ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا٥س}^٢}{٤س^٢} = \frac{٥}{٤}$

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢ ٥س}{٤س^٢} = \frac{(٥)^٢}{٤} = \frac{٢٥}{٤}$

⑧ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}^٣ ٢س}{\text{جا} ٢س^٣} = \frac{(٢)^٣}{٢} = ٤$

⑨ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$ حيث س ستيني

⑩ $\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\pi - س}$

$= \underset{\pi - س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\pi - س)}{\pi - س} = ١$

متنساش تصلى على حبيبك النبى

علمى نقط

الدرس السادس
بحث وجود نهاية للدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

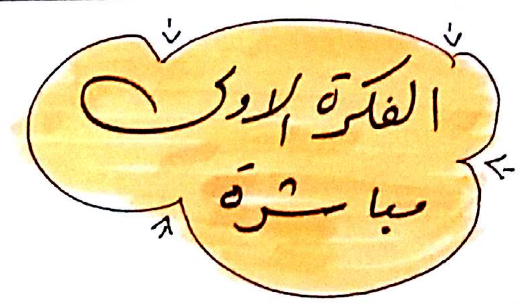
باختصار

١ إذا كانت النهاية اليمنى $د(أ)^{+}$ = النهاية اليسرى $د(أ)^{-}$

∴ النهاية موجودة

٢ وإذا كانت ≠ تكون النهاية غير موجودة

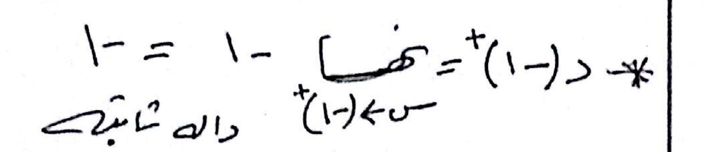
وهنطبق كل اللى تكلمنا قبل كده



مثال ١ إبحث وجود نهاية عند النقط المبينة

١ $د(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س < -١ \\ -١ & ، س > -١ \end{cases}$

عند $س = -١$



$* \; د(-١)^{+} = \lim_{س \to (-١)^{+}} -١ = -١$ دالة ثابتة

$* \; د(-١)^{-} = \lim_{س \to (-١)^{-}} ٢س + ١ = -٢ + ١ = -١$

∴ $د(-١)^{+} = د(-١)^{-}$

∴ $\lim_{س \to -١} د(س) = -١$

٢ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ ٢س - ٧ & ، س < ٣ \end{cases}$

عند $س = ٣$

الحل

$* \; د(٣)^{+} = \lim_{س \to ٣^{+}} \dfrac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^{+}} \dfrac{(س - ٣)(س - ٤)}{(س - ٣)} = ٣ - ٤$

$= -١$

$* \; د(٣)^{-} = \lim_{س \to ٣^{-}} ٢س - ٧ = ٦ - ٧ = -١$

∴ $د(٣)^{+} = د(٣)^{-}$

∴ $\lim_{س \to ٣} د(س) = -١$

٣

د(س) = { (٥س + ظا٢س) / (٦س + جاس) ، س > ٠ ؛ جتاس ، س < ٠ }

عند س = صفر

الحل

* د(٠)⁺ = نهـا (س ← ٠⁺) (٥س + ظا٢س) / (٦س + جاس)

بالقسمة على س فوق وتحت

= نهـا (س ← ٠⁺) (٥س/س + ظا٢س/س) / (٦س/س + جاس/س) = (٥ + ٢) / (٦ + ١)

= ٧/٧ = ١

* د(٠)⁻ = نهـا (س ← ٠⁻) جتاس = ١

∴ نهـا (س ← ٠) د(س) = ١

٤

د(س) = |س| / س عند س = صفر

نهـا (س ← ٠) د(س)

الحل

هنستعمل اعادة تعريف للمقياس زي ما اتعلمنا مع الجبر

د(س) = { س/س ، س > ٠ ؛ −س/س ، س < ٠ }

= { ١ ، س > ٠ ؛ −١ ، س < ٠ }

* نهـا (س ← ٠⁺) ١ = ١

* نهـا (س ← ٠⁻) −١ = −١

∴ نهـا (س ← ٠) د(س) غير موجودة

٥

د(س) = { س|س| − ١ ، س < ٠ ؛ |س|/س − ٢ ، س > ٠ }

أوجد نهـا (س ← ٠) د(س)

الحل

لأن المقياس هيطلع بعكس الإشارة

د(س) = { −س² − ١ ، س < ٠ ؛ ١ − ٢ = −١ ، س > ٠ }

لأن المقياس هيطلع نفس الإشارة

* د(٠)⁺ = نهـا (س ← ٠⁺) −١ = −١

* د(٠)⁻ = نهـا (س ← ٠⁻) (−س² − ١) = −١

∴ د(٠)⁺ = د(٠)⁻

∴ نهـا (س ← ٠) د(س) = −١

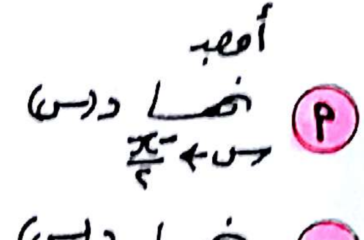


مثال ٢

أوجد نهايات كلاً من الدوال التالية

(١)
$$د(س) = \begin{cases} \frac{2س}{جاس} & ، -\frac{\pi}{2} < س < 0 \\ 2جتا\frac{4}{3}س & ، 0 \le س < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

أوجد

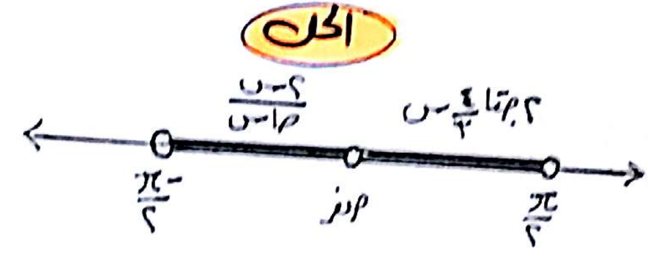


(أ) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} د(س)$

(ب) $\lim\limits_{س \to -\frac{\pi}{2}} د(س)$

(جـ) $\lim\limits_{س \to 0} د(س)$

الحل



(أ) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} د(س)$ غير موجودة

لأن الدالة غير معرفة على يسار $س = \frac{\pi}{2}$

(ب) $\lim\limits_{س \to -\frac{\pi}{2}} د(س)$ غير موجودة

لأن الدالة غير معرفة على يمين $س = -\frac{\pi}{2}$



* $د(0)^+ = \lim\limits_{س \to 0^+} 2جتا\frac{4}{3}س$

$= 2جتا0 = 2 \times 1 = 2$

* $د(0)^- = \lim\limits_{س \to 0^-} \frac{2س}{جاس} = 2$

$\therefore \lim\limits_{س \to 0} د(س) = 2$

(٢) ابحث وجود نهاية

$د(س) = \sqrt{س - 5}$ عند $س \to 5$

الحل

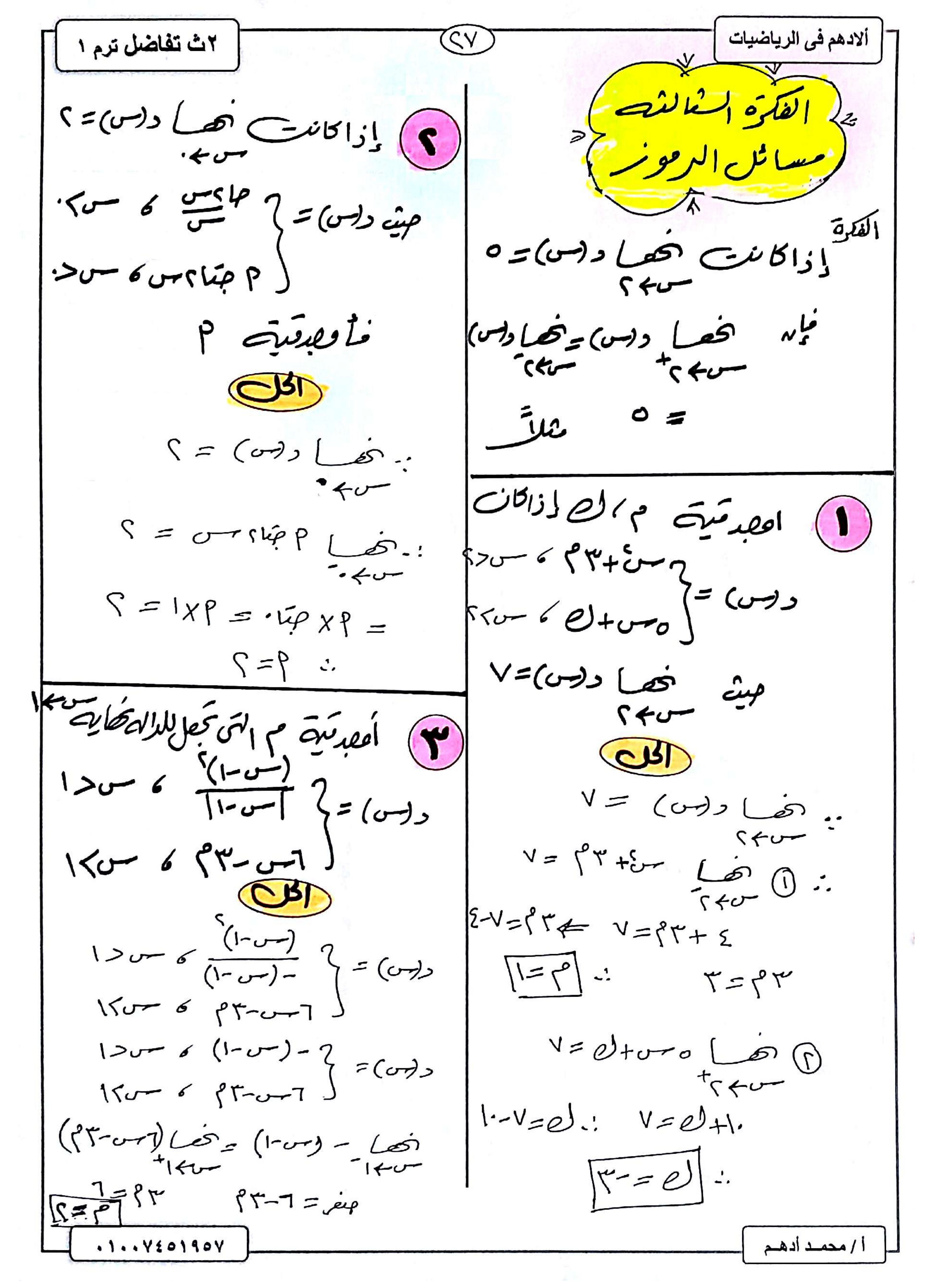


مجال الدالة $= [5 ، \infty[$

$\lim\limits_{س \to 5} د(س) =$ غير موجودة

لأن الدالة غير معرفة على يسار $س = 5$





الفكرة الثالثة
مسائل الرموز

الفكرة

إذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٥

فإن $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س)

= ٥ مثلاً

١

أوجد قيمة م ، ل إذا كان

د(س) = { س^٤ + ٣م ، س < ٢ ؛ ٥س + ل ، س > ٢ }

حيث $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٧

الحل

∵ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٧

∴ ① $\lim_{س \to ٢^-}$ س^٤ + ٣م = ٧

٤ + ٣م = ٧ ⟸ ٣م = ٧ − ٤

٣م = ٣ ∴ **م = ١**

② $\lim_{س \to ٢^+}$ ٥س + ل = ٧

١٠ + ل = ٧ ∴ ل = ٧ − ١٠

∴ **ل = −٣**

٢

إذا كانت $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ٢

حيث د(س) = { جا٢س / س ، س < ٠ ؛ م جتا٢س ، س > ٠ }

فأوجد قيمة م

الحل

∵ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ٢

∴ $\lim_{س \to ٠^+}$ م جتا٢س = ٢

= م × جتا٠ = م × ١ = ٢

∴ م = ٢

٣

أوجد قيمة م التي تجعل للدالة نهاية عند س ← ١

د(س) = { (س−١)² / |س−١| ، س < ١ ؛ ٦س − ٣م ، س > ١ }

الحل

د(س) = { (س−١)² / −(س−١) ، س < ١ ؛ ٦س − ٣م ، س > ١ }

د(س) = { −(س−١) ، س < ١ ؛ ٦س − ٣م ، س > ١ }

$\lim_{س \to ١^-}$ −(س−١) = $\lim_{س \to ١^+}$ (٦س − ٣م)

صفر = ٦ − ٣م

٣م = ٦

م = ٢

علمي فقط

الدرس السابع
الاتصال

تكون الدالة متصلة إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية معاً

(بنجيب الدالة من الفرع اللي فيه =)

١ تكون الدالة معرفة

٢ تكون النهاية موجودة

٣ قيمة الدالة = قيمة النهاية

الفكرة الأولى مباشرة

مثال ١ ابحث اتصال كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد التالية

١ د(س) = { س+١ ، س≥١ ؛ ٣−س ، س<١ }

عند س = ١

* د(١) = س+١ = ١+١ = ٢
* د(١)$^{+}$ = نهـا (س←١$^{+}$) س+١ = ٢
* د(١)$^{-}$ = نهـا (س←١) ٣−س = ٢

∴ نهـا (س←١) د(س) = د(١) = ٢

∴ الدالة متصلة عند س = ١

٢ د(س) = { ٥س−٦ ، س≥٣ ؛ ٣س+٤ ، س<٣ }

عند س = ٣

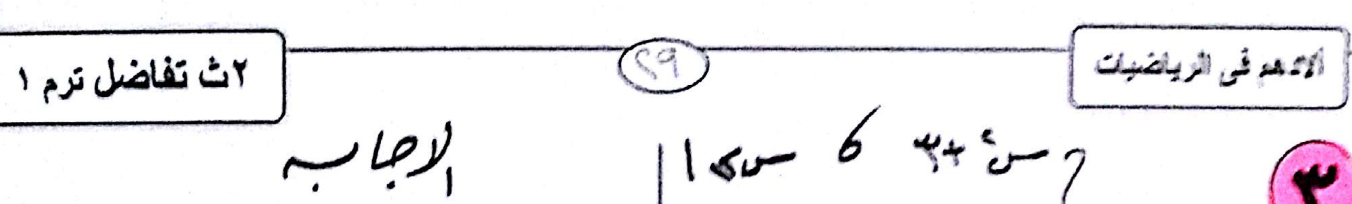
الحل

* د(٣) = ٥×٣ − ٦ = ١٥ − ٦ = ٩
* د(٣)$^{+}$ = نهـا (س←٣$^{+}$) ٥س−٦ = ٩
* د(٣)$^{-}$ = نهـا (س←٣) ٣س+٤ = ١٣

∵ د(٣)$^{+}$ ≠ د(٣)$^{-}$

∴ نهـا (س←٣) د(س) غير موجودة

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٣



③ $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٣ & ، س \geq ١ \\ \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١} & ، س < ١ \end{cases}$

عندما س = ١

الحل

* $د(١) = س^٢ + ٣ = ١ + ٣ = ٤$

* $د(١)^+ = \lim_{س \to ١^+} س^٢ + ٣ = ١ + ٣ = ٤$

* $د(١)^- = \lim_{س \to ١^-} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^-} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{(س - ١)} = ٤$

∵ $د(١)^+ = د(١)^- = ٤$

∴ $\lim_{س \to ١} د(س) = د(١)$

∴ الدالة متصلة عند س = ١

الفكرة الثانية
إعادة تعريف الدالة

سؤال رفيع
متى يمكن اعادة تعريف الدالة
حتى تصبح متصلة

الاجابه

① إذا كانت النهاية موجودة
والدالة معرفة لكن ≠ بعض

② إذا كانت النهاية موجودة
والدالة غير معرفة

ولكن
إذا كانت النهاية غير موجودة
فلا يمكن إعادة تعريف الدالة

مثال ٢
وضح هل يمكن اعادة تعريف كلاً من الدوال الاتية حتى تصبح متصلة ؟

① $د(س) = \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س - ٤}$

عند س = ٤

الحل

الدالة غير معرفة عند س = ٤ ∴ غير متصلة

لإعادة التعريف

$\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(٢س + ١)}{(س - ٤)} = ٨ + ١ = ٩$

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ ٩ & ، س = ٤ \end{cases}$$

٢ أعد تعريف الدالة إن أمكن

$$د(س) = \begin{cases} ٤س - ١ & ، س < ١ \\ س^٢ + ٢ & ، س > ١ \end{cases}$$

لكي تكون متصلة عند س = ١

الحل

* د(س) غير معرفة عند س = ١ (لأنه مفيش = في أي من الفرعين)

* $د(١)^- = نها_{س \to ١^-} ٤س - ١ = ٣$

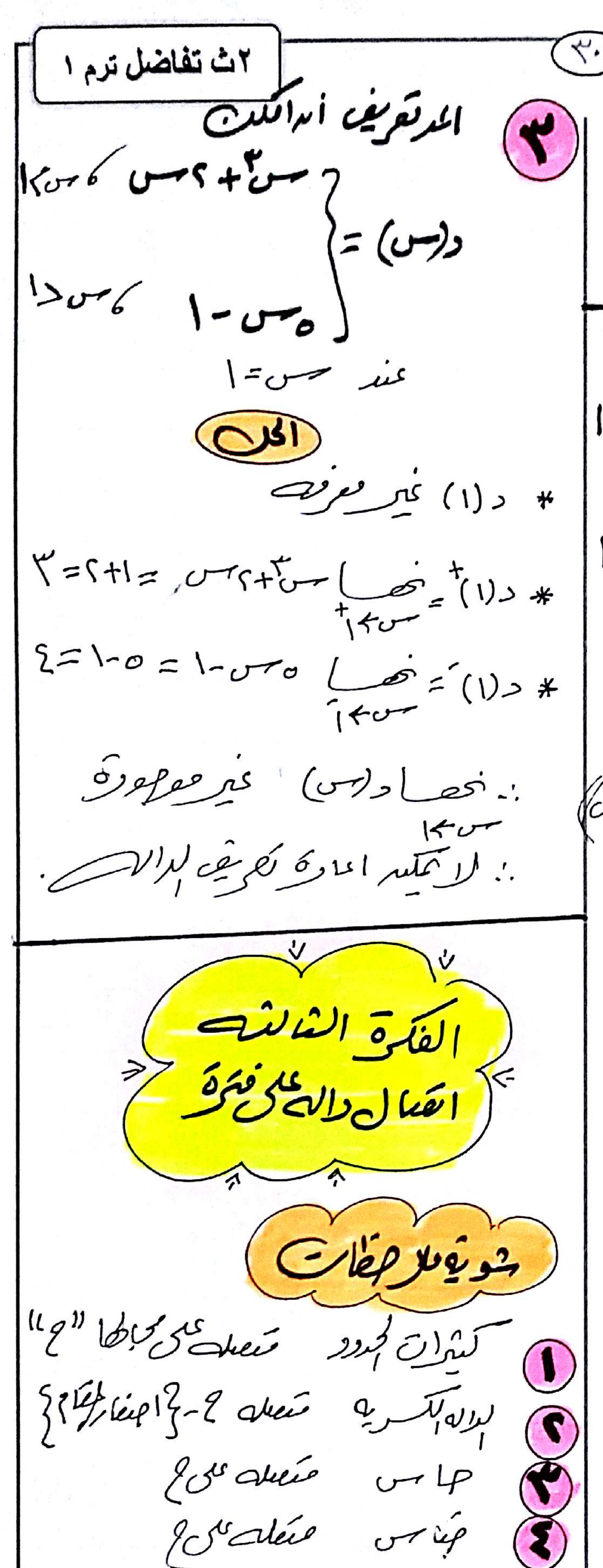
* $د(١)^+ = نها_{س \to ١^+} س^٢ + ٢ = ٣$

∴ النهاية موجودة

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة

بوضع د(١) = ٣

$$د(س) = \begin{cases} ٤س - ١ & ، س < ١ \\ ٣ & ، س = ١ \\ س^٢ + ٢ & ، س > ١ \end{cases}$$



٣ أعد تعريف إن أمكن

$$د(س) = \begin{cases} س^٣ + ٢س & ، س > ١ \\ ٥س - ١ & ، س < ١ \end{cases}$$

عند س = ١

الحل

* د(١) غير معرفة

* $د(١)^+ = نها_{س \to ١^+} س^٣ + ٢س = ١ + ٢ = ٣$

* $د(١)^- = نها_{س \to ١^-} ٥س - ١ = ٥ - ١ = ٤$

∴ $نها_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة

∴ لا يمكن إعادة تعريف الدالة

الفكرة الثالثة
اتصال دالة على فترة

شوية ملاحظات

1. كثيرات الحدود متصلة على مجالها "ح"
2. الدالة الكسرية متصلة ح - {أصفار المقام}
3. جا س متصلة على ح
4. جتا س متصلة على ح
5. ظا س متصلة على
6. ح - {س : س = $\frac{\pi}{٢} + ن\pi$ ، ن ∈ ص}

مثال ٣

ابحث اتصال كلاً من الدوال الاتية على مجالها

(١) $د(س) = (س + ١)^٢ - جا س$

متصلة على ح

(٢) $د(س) = \frac{جتا س + جا س}{س + ٢}$

متصلة على ح - {-٢}

(٣) $د(س) = \sqrt[٣]{٥ - س^٢}$

متصلة على ح دليل الجذر فردي

(٤) $د(س) = \sqrt{س + ٢}$

الحل

بوضع س + ٢ ≥ ٠ ∴ س ≥ -٢

المجال [-٢ ، ∞[

الدالة متصلة فى]-٢ ، ∞[

وذلك بوضع أ ∈]-٢ ، ∞[

فإن د(أ) = $\sqrt{أ + ٢}$

، $\lim_{س \to أ} \sqrt{س + ٢} = \sqrt{أ + ٢}$

∴ الدالة متصلة على]-٢ ، ∞[(١)

لسه هنبحث الاتصال عند س = -٢

د(-٢) = $\sqrt{-٢ + ٢}$ = ٠

$د(-٢)^+ = \lim_{س \to -٢^+} \sqrt{س + ٢} = ٠$

$د(-٢)^- = \lim_{س \to -٢^-} \sqrt{س + ٢} = ٠$

∴ الدالة متصلة عند س = -٢ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ الدالة متصلة على [-٢ ، ∞[

(٥) $د(س) = \begin{cases} ١ + جا س & ، ٠ \le س \le \frac{\pi}{٢} \\ ١ - جتا^٢ س & ، س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

الحل

أولاً د(س) = ١ + جا س متصلة]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

د(س) = ١ - جتا^٢ س متصلة]$\frac{\pi}{٢}$ ، ∞[

، ∵ ١ + جا س متصلة على مجالها ح

∴ متصلة على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

ثانياً

ابحث الاتصال عند س = $\frac{\pi}{٢}$

د($\frac{\pi}{٢}$) = ١ + جا $\frac{\pi}{٢}$ = ٢

$د(\frac{\pi}{٢})^+ = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}^+} ١ - جتا^٢ س = ٢$

$د(\frac{\pi}{٢})^- = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}^-} ١ + جا س = ٢$

∴ الدالة متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

من أولاً وثانياً ∴ الدالة متصلة [٠ ، ∞[

الفكرة الرابعة
الرموز

(١) إذا كانت د(س) متصلة عند س = -٣ فأوجد قيمة أ

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س} + 3} & \text{، س} \neq -3 \\ \text{س} + \text{أ} & \text{، س} = -3 \end{cases}$$

الحل

∵ الدالة متصلة ∴ $\text{د}(-3) = \lim_{\text{س} \to -3} \text{د(س)}$

$$\lim_{\text{س} \to -3} \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س} + 3} = \lim_{\text{س} \to -3} \frac{(\text{س} + 3)(\text{س} - 1)}{(\text{س} + 3)}$$

$= -3 - 1 = -4$

∴ $\text{د}(-3) = -3 + \text{أ} = -4$

$\text{أ} = -4 + 3$ ∴ $\boxed{\text{أ} = -1}$

(٢) إذا كانت د(س) متصلة عند س = ٢ وكانت د(٢) = ٤ فأوجد قيمتي أ ، ب

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^2 + \text{أ س} - 2 & \text{عندما س} \geq 2 \\ 5\text{أ} + \text{ب س} & \text{عندما س} < 2 \end{cases}$$

الحل

∵ الدالة متصلة ، د(٢) = ٤

∴ $\lim_{\text{س} \to 2^+} \text{س}^2 + \text{أ س} - 2 = 4$

$4 + 2\text{أ} - 2 = 4$

$2\text{أ} = 2$ ∴ $\boxed{\text{أ} = 1}$

وكذلك $\lim_{\text{س} \to 2^-} 5\text{أ} + \text{ب س} = 4$

∴ $5 + 2\text{ب} = 4$

$2\text{ب} = 4 - 5$ $\quad 2\text{ب} = -1$

∴ $\boxed{\text{ب} = -\frac{1}{2}}$

(٣) أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س} + 3}{\text{س}^2 + \text{أ س} + 9}$$ متصلة على ح

الحل

لازم المقام ≠ صفر علشان تكون متصلة على ح

يبقى هنتحاول المميز أصغر من صفر حتى لا يكون لها حل فى ح

$\text{ب}^2 - 4\text{أ جـ} < 0$

حيث أ = ١ ، ب = أ ، جـ = ٩

$\text{أ}^2 - 4 \times 1 \times 9 < 0$

$\text{أ}^2 - 36 < 0$

$\text{أ}^2 < 36$ بناخد √

$|\text{أ}| < 6$

$-6 < \text{أ} < 6$

∴ $\text{أ} \in \,]-6 \text{ ، } 6[$

انتهى التفاضل خالص تمنياتى

ثانياً " حسب المثلثات "

الدرس الأول : قاعدة الجيب .

الدرس الثانى : قاعدة جيب التمام .

الدرس الثالث : **حل المثلث .**

مراجعة على القوانين

طول القوس — القياس الدائري — نصف القطر

(ل ، $\theta^{د}$ ، نق)

١) $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$

٢) $\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{180}$

٣) $س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{180}{\pi}$

٤) جا $(90 + \theta)$ = جتا θ

٥) جا $(90 - \theta)$ = جتا θ

٦) جا $(180 - \theta)$ = جا θ

٧) جتا $(180 - \theta)$ = − جتا θ

٨) ظا $(180 - \theta)$ = − ظا θ

٩) جا² س + جتا² س = ١

جا² س = ١ − جتا² س

جتا² س = ١ − جا² س

١٠) ١ + ظا² س = قا² س

قا² س − ظا² س = ١

قا² س − ١ = ظا² س

١١) ١ + ظتا² س = قتا² س

قتا² س − ظتا² س = ١

قتا² س − ١ = ظتا² س

١٢) جا θ قتا θ = ١

١٣) جتا θ قا θ = ١

١٤) ظا θ ظتا θ = ١

١٥) ظا θ = $\frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta}$

١٦) ظتا θ = $\frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta}$

١٧) مساحة المضلع المنتظم = $\frac{ن}{٤}$ س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$

١٨) مساحة الدائرة = π نق²

١٩) محيط الدائرة = ٢ π نق

٢٠) مساحة المثلث = $\sqrt{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-ج)}$

حيث ع = نصف المحيط

= $\frac{1}{2}$ أ ب جا ج

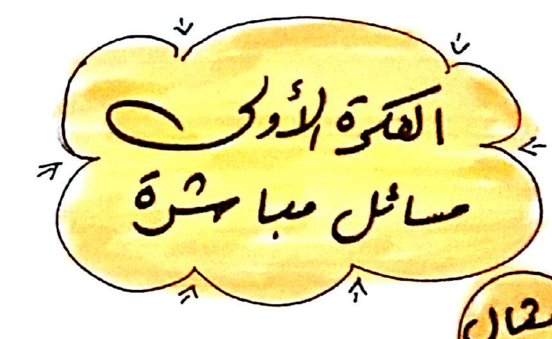
الدرس الأول قاعدة الجيب

جيب البنطلون

في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢نق}$$

حيث نق نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث



مثال ١

Δ أ ب جـ فيه جـ = ١٩ سم ، ق(∠أ) = ١١٢° ، ق(∠ب) = ٣٣°

أوجد ب ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن Δ أ ب جـ لأقرب رقمين عشريين ومساحة ومحيط الدائرة

الحل

ق(∠أ) = ١١٢° ، ق(∠ب) = ٣٣°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − [١١٢° + ٣٣°]

= ٣٥°

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢نق}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا ١١٢°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٣٣°}} = \frac{\text{١٩}}{\text{جا ٣٥°}} = \text{٢نق}$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{\text{١٩ جا ٣٣}}{\text{جا ٣٥°}} = \text{١٨,٠٤ سم}$$

$$\text{،}\ \text{٢نق} = \frac{\text{١٩}}{\text{جا ٣٥}} \quad \therefore \text{نق} = \frac{\text{١٩}}{\text{٢ جا ٣٥}}$$

نق = ١٦,٥٦ سم

مساحة الدائرة = π نق² = π (١٦,٥٦)²

= ٨٦١,٨٢ سم²

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ١٦,٥٦

= ١٠٤,٠٥ سم

مثال ٢

Δ أ ب جـ فيه ب = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠جـ) = ٨٠°

أوجد طول أكبر الأضلاع طولاً لأقرب سم

الحل

أكبر الأضلاع يقابل أكبر الزوايا

ق(∠ب) = ١٨٠ − [٤٠° + ٨٠°] = ٦٠°

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$$

$\frac{أ}{جا ٤٠°} = \frac{١٠}{جا ٦٠°} = \frac{جـ}{جا ٨٠°}$

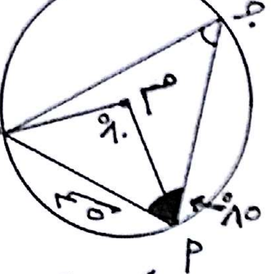
أكبر الأضلاع هو جـ

$جـ = \frac{١٠ جا ٨٠°}{جا ٦٠°} = ١١,٤ \simeq ١١$ سم

مثال ٣

في الشكل المقابل
م دائرة أب = ٥ سم
ق (أ م^ ب) = ٨٠°
، ق (جـ أ^ ب) = ٨٥°

أوجد (أ) محيط Δ أ ب جـ
(ب) مساحة سطح الدائرة م



الحل

في Δ أ ب جـ

ق (جـ^) = ٤٠°

لأن قياس المحيطية = ½ المركزية المشتركة معها في نفس القوس

∴ جـ = ٥ سم ق (أ^) = ٨٥° ق (جـ^) معلوم

∴ ق (ب^) = ١٨٠ − (٨٥ + ٤٠) = ٥٥°

$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢نق$

$\frac{أ}{جا ٨٥°} = \frac{ب}{جا ٥٥°} = \frac{٥}{جا ٤٠°} = ٢نق$

∴ $أ = \frac{٥ جا ٨٥°}{جا ٤٠°} = ٧,٧٥$ سم

$ب = \frac{٥ جا ٥٥°}{جا ٤٠°} = ٦,٣٧$ سم

(أ) ∴ محيط Δ أ ب جـ = أ + ب + جـ

= ٥ + ٧,٧٥ + ٦,٣٧ ≃ ١٩,١٢ سم

(ب) $نق = \frac{٥}{٢ جا ٤٠°} = ٣,٨٩$ سم

مساحة الدائرة = π نق² =

= π (٣,٨٩)² = ٤٧,٥ سم²

مثال ٤

Δ أ ب جـ مساحته = ٤٥٠ سم²
فيه ق (ب^) = ٨٢°
ق (جـ^) = ٥٦° أوجد قيمة أ

الحل

ق (أ^) = ١٨٠° − [٨٢° + ٥٦°] = ٤٢°

مساحة Δ أ ب جـ = ½ أ ب جا جـ

ولكن أ مجهول ، ب مجهول

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب}$

∴ $ب = \frac{أ جا ب}{جا أ} = \boxed{\frac{أ جا ٨٢°}{جا ٤٢°}}$

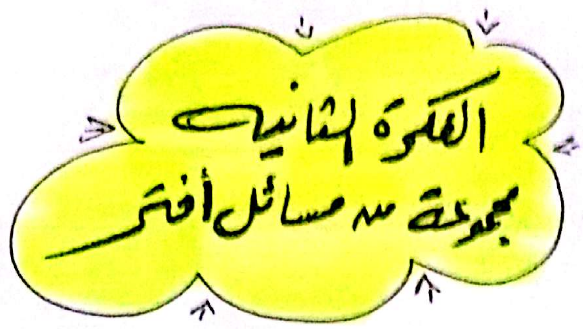
∴ ½ أ ب جا جـ = ٤٥٠ بالضرب × ٢

$أ \times \frac{أ جا ٨٢°}{جا ٤٢°} \times جا ٥٦° = ٩٠٠$



$م^2 = ٩٠٠ \times \frac{جا ٤٢°}{جا ٨٢° \, جا ٥٦°} = ٧٣٣٫٥$

$\therefore م = \sqrt{٧٣٣٫٥} \simeq ٢٧$ سم





اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ س ص ع مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $١٠\sqrt{٣}$ فإن طول قطر الدائرة الخارجة عنه = ---- سم

(٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠)

الفكرة: $\frac{أ}{جا أ} = ٢ نق$

$\therefore ٢ نق = \frac{١٠\sqrt{٣}}{جا ٦٠} = ٢٠$ لأنه متساوي الأضلاع

ولو طلب نق = ١٠

---

٢ في Δ س ص ع يكون ٢ نق جا س = ...

(ع ، ص ، س ، مساحة Δ)

الفكرة: $\frac{س}{جا س} = ٢ نق$

$\therefore س = ٢ نق جا س$



في Δ س ص ع المقدار $\frac{ص}{٢ جا ص}$ = ----



(نق ، ٢ نق ، ½ نق ، ٤ نق)



$\frac{ص}{جا ص} = ٢ نق$ صح ؟

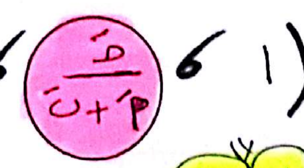
هو قسم الأولى على ٢ ، تقسم أنت الثانية ÷ ٢

يعني $\frac{ص}{٢ جا ص} = \frac{٢ نق}{٢} = نق$

---

٤ في أي مثلث أ ب جـ يكون

$\frac{جا(أ+ب)}{جا أ + جا ب}$ = ----



(١ ، $\frac{جـ}{أ+ب}$ ، $\frac{أ}{ب+جـ}$ ، $\frac{ب}{أ+جـ}$)

الفكرة: $جا(أ+ب) = جا(١٨٠ - جـ) = جا جـ$

$\therefore \frac{جا جـ}{جا أ + جا ب} = \frac{جـ}{أ+ب}$

---

٥ في Δ أ ب جـ إذا كان

$\frac{جا أ}{٢} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا جـ}{٥}$

فإن أ : جـ : ب = ٢ : ٥ : ٣

دي سهلة

بس أنا بدلت الترتيب عشان الدوخ

مش مرتبة فاهمين ؟

٦ فى △ س ص ع إذا كان

٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع

فإن س : ص : ع = ...

(٤:٣:٢ ، ٣:٤:٦ ، ٦:٤:٣ ، **٦:٣:٤**)

الفكرة: عايزين مقام يقبل عليهم كلهم يبقى هنقسم على ١٢

$\frac{\text{٣ جا س}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٤ جا ص}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٢ جا ع}}{\text{١٢}}$

$\frac{\text{جا س}}{\text{٤}} = \frac{\text{جا ص}}{\text{٣}} = \frac{\text{جا ع}}{\text{٦}}$

∴ س : ص : ع = ٦:٣:٤

٧ △ أ ب جـ فيه

$\frac{\text{جا أ}}{\text{٣}} = \frac{\text{٢ جا ب}}{\text{٥}} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{٤}}$

فإن أ : ب : جـ = ...

(**٨:٥:٦** ، ٦:٥:٨ ، ٤:٢:٧ ، ٤:٥:٣)

الفكرة: شكلها مظبوط بس عايزين نتخلص من ② اللى فى البسط يبقى نضرب المقامات × ٢

$\frac{\text{جا أ}}{\text{٢×٣}} = \frac{\text{٢ جا ب}}{\text{٢×٥}} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{٢×٤}}$

يبقى ٨:٥:٦

٨ فى △ أ ب جـ يكون

٢ نق² جا أ جا ب جا جـ = ...

(**مساحة △** ، محيط △ ، مساحة ○ ، محيط ○)

الفكرة: مساحة △ = ½ أ ب جا جـ صح؟

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق

∴ أ = ٢ نق جا أ ، ب = ٢ نق جا ب

∴ مساحة △ = ½ × ٢ نق جا أ × ٢ نق جا ب × جا جـ

= ٢ نق² جا أ جا ب جا جـ

٩ فى △ أ ب جـ يكون $\frac{\text{أ ب جـ}}{\text{٤ نق}}$ = ...

الفكرة دى أكمل

$\frac{\text{أ ب جـ}}{\text{٤ نق}} = \frac{1}{2} \frac{\text{أ ب جـ}}{\text{٢ نق}}$

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق

∴ المقدار = $\frac{1}{2} \frac{\text{أ ب جـ}}{\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}}$ ← مقام المقام بسط

= $\frac{1}{2} \frac{\text{أ ب جـ جا أ}}{\text{أ}}$

= ½ ب جـ جا أ = **مساحة المثلث**



١٠ في △ س ص ع إذا كان $\frac{٢س}{جا س} = ٨$ فإن مساحة الدائرة الخارجة = ... π سم²

(١٦ ، ٨ ، **٤** ، ٦٤)

الفكرة

$\frac{س}{جا س} = ٢نق$ صح ؟

بس هو ضرب × ٢ يبقى نضرب × ٢

يعني $\frac{٢س}{جا س} = ٤نق$

أفهم مدكدة أنه ٤نق = ٨

∴ نق = $\frac{٨}{٤}$ = ٢ سم

مساحة الدائرة = π نق² = π × ٢² = ٤π

---

١١ في △ س ص ع يكون س ص : ص ع =

(جا س : جا ص ، جا ص : جا ع ، **جا ع : جا س**)

الفكرة

س ص = ع ، ص ع = س

∴ ع : س = جا ع : جا س



الفكرة الثالثة مسائل النسب

تذكر إذا كان

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ج}{جا ج}$$

فإن $\frac{أ+ب}{جا أ+جا ب} = \frac{أ+٣ج}{جا أ+٣جا ج} = \frac{أ+ب+ج}{جا أ+جا ب+جا ج} = \frac{أ}{جا أ}$

وهكذا $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدى النسب

مثال ٦

أ ب ج مثلث محيطه ١٨ سم وفيه $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا ج

أوجد أطوال أضلاعه

الحل

∴ $\frac{جا أ}{٢} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا ج}{٤}$

∴ $\frac{٢}{جا أ} = \frac{٣}{جا ب} = \frac{٤}{جا ج}$

∴ أ : ب : ج = ٢ : ٣ : ٤

نفرض أن

أ = ٢ك ، ب = ٣ك ، ج = ٤ك

∴ المحيط = ١٨ سم   أ + ب + ج = ١٨ سم

∴ ٢ك + ٣ك + ٤ك = ١٨

$\therefore 9\,\text{ك} = 18$

$\therefore \text{ك} = \frac{18}{9} = 2$

$\therefore \text{أ} = 2\text{ك} = 2\times 2 = 4\ \text{سم}$

$\text{ب} = 3\text{ك} = 3\times 2 = 6\ \text{سم}$

$\text{جـ} = 4\text{ك} = 4\times 2 = 8\ \text{سم}$

مثال ٧

إذا كان محيط △ أ ب جـ = ٤٠ سم ، ق($\hat{أ}$) = ٤٤° ، ق($\hat{ب}$) = ٦٦° أوجد أطوال أضلاع △ أ ب جـ

الحل

$\text{ق}(\hat{جـ}) = 180^\circ - (44^\circ + 66^\circ) = 70^\circ$

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{جا أ}+\text{جا ب}+\text{جا جـ}}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا } 44^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } 66^\circ} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا } 70^\circ} = \frac{40}{\text{جا } 44^\circ + \text{جا } 66^\circ + \text{جا } 70^\circ}$$

$$\text{أ} = \frac{40\ \text{جا } 44^\circ}{\text{جا } 44^\circ + \text{جا } 66^\circ + \text{جا } 70^\circ} = 10.9\ \text{سم}$$

$$\text{ب} = \frac{40\ \text{جا } 66^\circ}{\text{جا } 44^\circ + \text{جا } 66^\circ + \text{جا } 70^\circ} = 14.3\ \text{سم}$$

$$\text{جـ} = \frac{40\ \text{جا } 70^\circ}{\text{جا } 44^\circ + \text{جا } 66^\circ + \text{جا } 70^\circ} = 14.8\ \text{سم}$$

هتكتبها مرة واحدة على الآلة وكل مرة تعدل البسط فقط

مثال ٨

△ أ ب جـ فيه ق($\hat{أ}$) = ٦٠° ، ق($\hat{ب}$) = ٤٥° فإذا كان أ + ب = ($\sqrt{6}$ + ٢) سم فأوجد كلاً من أ ، ب

الحل

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{جا أ}+\text{جا ب}}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا } 60^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}+2}{\text{جا } 60^\circ + \text{جا } 45^\circ}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{(\sqrt{6}+2)\times \text{جا } 60^\circ}{\text{جا } 60^\circ + \text{جا } 45^\circ} = \sqrt{6}\ \text{سم}$$

$\therefore \text{أ} + \text{ب} = \sqrt{6} + 2$

$\therefore \text{ب} = 2\ \text{سم}$

بدل ما تعمل القانون الطويل

مثال ٩

△ أ ب جـ فيه ق($\hat{أ}$) : ق($\hat{ب}$) : ق($\hat{جـ}$) = ٣ : ٤ : ٣ فإذا كان أ = ٥ سم فأوجد محيط المثلث

الحل

نفرض أن

$\text{ق}(\hat{أ}) = 3\text{س}$ ، $\text{ق}(\hat{ب}) = 4\text{س}$

، $\text{ق}(\hat{جـ}) = 3\text{س}$

$\because \text{ق}(\hat{أ}) + \text{ق}(\hat{ب}) + \text{ق}(\hat{جـ}) = 180^\circ$

$\therefore 3\text{س} + 4\text{س} + 3\text{س} = 180$

$10\text{س} = 180$ $\quad \therefore \text{س} = 18$

ونجيب قياسات أ ، ب ، جـ ونشتغل على قاعدة الجيب

الواجب

السؤال الأول: أكمل الجمل التالية

١) في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاعه مع ......

٢) في △ أ ب جـ يكون $\frac{أ}{....} = \frac{....}{جا ب} = \frac{....}{....} = ...$

٣) دائرة طول قطرها ٢٠ سم تمر برؤوس △ أ ب جـ الحاد الزوايا الذي فيه ب جـ = ١٠ سم فإن ق($\hat{أ}$) = ...

٤) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨√٣ سم فإن

* طول قطر الدائرة الخارجية = ... سم
* محيط الدائرة الخارجية = ... π سم
* مساحة الدائرة الخارجية = ... سم²

٥) $\frac{جا أ}{٢} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا جـ}{٤}$ فإن أ : ب : جـ
= .... : .... : ....

٦) $\frac{١}{٣}$ جا أ = $\frac{١}{٤}$ جا ب = $\frac{١}{٥}$ جا جـ
فإن أ : جـ : ب = ... : .... : ....

٧) ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا جـ
فإن أ : ب : جـ = ... : .... : ....

٨) $\frac{جا (أ + ب)}{جا أ + جا ب} = \frac{....}{أ + ب}$

٩) $\frac{أ + ب + جـ}{جا أ + جا ب + جا جـ} = \frac{....}{....}$

السؤال الثاني: أجب مقرباً الأطوال لأقرب وحدة والزوايا لأقرب دقيقة

١) △ أ ب جـ فيه جـ = ٣٤ سم
ق($\hat{أ}$) = ١٠٠° ، ق($\hat{ب}$) = ١٥ سم
أوجد محيط ومساحة △ أ ب جـ

٢) △ أ ب جـ فيه ق($\hat{ب}$) = ٤٥°
ق($\hat{جـ}$) = ٦٠° وطول قطر الدائرة الخارجية
= ٤٠ سم أوجد محيطه ومساحته

٣) أ ب جـ مثلث فيه جـ = ١٢ سم
، ق($\hat{ب}$) = ٣ ق($\hat{أ}$) = ٦٠°
أوجد أ ثم أوجد مساحة △

٤) △ أ ب جـ فيه ب = ٥ سم
طا جـ = $\frac{٤}{٣}$ ، ق($\hat{ب}$) = ٣٠°
أوجد أ ، جـ ، مساحة △ أ ب جـ

اللهم علمنا ما ينفعنا وانفعنا بما علمتنا

الدرس الثانى
قاعدة جيب التمام

هوش تمام قوى

الصورة الأولى

إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة

* $أ^2 = ب^2 + ج^2 - 2 ب ج \text{ جتا } أ$
* $ب^2 = أ^2 + ج^2 - 2 أ ج \text{ جتا } ب$
* $ج^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب \text{ جتا } ج$

متنساش تاخد الجذر

الصورة الثانية

إذا علمت الأضلاع الثلاثة أو النسبة بينهم

* $\text{جتا } أ = \frac{ب^2 + ج^2 - أ^2}{2 ب ج}$
* $\text{جتا } ب = \frac{أ^2 + ج^2 - ب^2}{2 أ ج}$
* $\text{جتا } ج = \frac{أ^2 + ب^2 - ج^2}{2 أ ب}$

وفى الآخر تعمل cos shift علشان تجيب الزاوية

الفكرة الأولى
مسائل مباشرة

مثال ١

△ أ ب جـ فيه أ = ٣ سم ، ب = ٥ سم ، جـ = ٧ سم

أوجد ق($\hat{ج}$)

الحل

$\text{جتا } ج = \frac{أ^2 + ب^2 - ج^2}{2 أ ب} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5}$

$= \frac{-1}{2}$

∴ ق($\hat{ج}$) = ١٢٠°

مثال ٢

أ ب جـ △ فيه ق($\hat{ج}$) = ٩٦° ٢٣َ

أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم أوجد

(١) جـ (٢) مساحة △ أ ب جـ

(٣) طول نصف قطر الدائرة الخارجة لـ △

الحل

$ج^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب \text{ جتا } ج$

$= 7^2 + 9^2 - 2 \times 7 \times 9 \times \text{جتا } 96°23'$

$ج^2 = 144$ بأخذ √

∴ جـ = ١٢ سم

② مساحة △ أ ب جـ = ½ أ ب جا جـ

= ½ × ٧ × ٩ × جا ٢٣ َ ٩٦° = ٣١,٣ ≃ ٣١ سم²

③ ∵ جـ / جا جـ = ٢ نق

نق = جـ / (٢ جا جـ) = ١٢ / (٢ جا ٢٣ َ ٩٦°)

= ٦ سم

مثال ٣

△ أ ب جـ فيه ⅓ جا أ = ¼ جا ب = ⅕ جا جـ

أوجد ق(جـ) وإذا كان محيط △ = ٢٤ سم أوجد مساحته

الحل

∵ جا أ / ٣ = جا ب / ٤ = جا جـ / ٥

∴ أ : ب : جـ = ٣ : ٤ : ٥

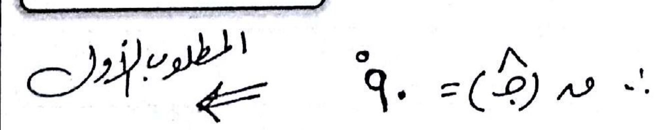
بفرض أن أ = ٣ ل

ب = ٤ ل

جـ = ٥ ل

جتا جـ = (أ² + ب² − جـ²) / (٢ أ ب) = ((٣ل)² + (٤ل)² − (٥ل)²) / (٢ × ٣ل × ٤ل)

= صفر / ٢٤ = صفر



∴ ق(جـ) = ٩٠° ⟸ المطلوب الأول

∵ المحيط = ٢٤ سم ، أ + ب + جـ = ٢٤

∴ ٣ل + ٤ل + ٥ل = ١٢ل = ٢٤

∴ ل = ٢٤ / ١٢ = ٢

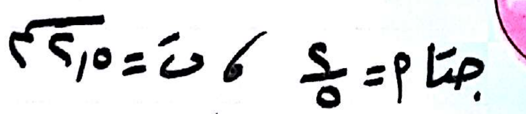
∴ أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، جـ = ١٠ سم

مساحة △ = ½ أ ب جا جـ

= ½ × ٦ × ٨ × جا ٩٠° = ٢٤ سم²

مثال ٤

أ ب جـ مثلث فيه



جتا أ = ٤/٥ ، ب = ٢,٥ سم

، جـ = ٢ سم أثبت أن

△ أ ب جـ متساوي الرجلين

الحل

أ² = ب² + جـ² − ٢ ب جـ جتا أ

= (٢,٥)² + (٢)² − ٢ × ٢,٥ × ٢ × ٤/٥

= ٦,٢٥

∴ أ = √٦,٢٥ = ٢,٥ سم

∴ △ أ ب جـ فيه

أ = ب

∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين

أوعى تنسى جتا ٤/٥

حشوية ملاحظات مهمة

خواص متوازي الأضلاع

١. كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول
٢. كل زاويتين متقابلتين متساويتين في القياس
٣. كل زاويتين متجاورتين متكاملتين مجموعهم = ١٨٠°
يعني جتا أ = − جتا ب
٤. القطران ينصف كل منهما الآخر

لإثبات أن الشكل رباعياً دائرياً

١. كل زاويتين متقابلتين متكاملتين مجموعهم = ١٨٠°
جتا (....) = − جتا (المقابلة)

أو

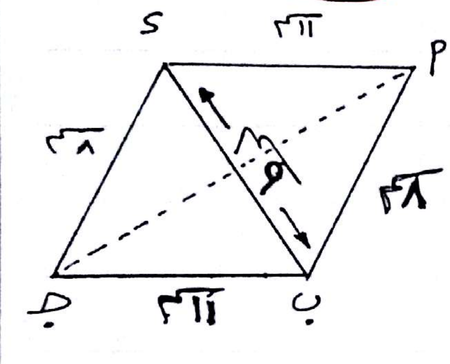
٢. أي زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها متساويتان في القياس



مثال ٥

أ ب ج د متوازي أضلاع فيه أ ب = ٨ سم
ب ج = ١١ سم ، ب د = ٩ سم
أوجد طول قطره $\overline{أ ج}$

الحل



هنبدأ بالمثلث أ ب د نجيب منه جتا أ ونعوض بيها في △ أ ب ج علشان نجيب أ ج

الخطوات

في △ أ ب د : جتا أ = $\frac{٨^٢ + ١١^٢ - ٩^٢}{٢ \times ٨ \times ١١} = \frac{١٣}{٢٢}$

∵ (أ) ، (ب) متكاملتان
∴ جتا ب = $\frac{-١٣}{٢٢}$

في △ أ ب ج

$(أ ج)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب ج)^٢ - ٢ (أ ب)(ب ج)$ جتا ب

$(أ ج)^٢ = (١١)^٢ + (٨)^٢ - ٢ \times ١١ \times ٨ \times (\frac{-١٣}{٢٢})$

$= ٢٨٩$

∴ أ ج = ١٧ سم

مثال ٦

ا ب جـ ء ▱ محيطه ٢٠ سم فإذا كانت النسبة بين طولى ضلعين متجاورين ٢ : ٣ وكان ب ء = ٨ سم فأوجد طول ا جـ

الحل

على فكرة

محيط المتوازي = ضعف مجموع أى ضلعين متجاورين

∴ مجموع أى ضلعين متجاورين = $\frac{1}{2}$ × المحيط

∴ ٢س + ٣س = ١٠

٥س = ١٠ ∴ س = ٢

∴ ا ب = ٤ سم ، ا ء = ٦ سم

فى △ ا ب ء : جتا ا = $\frac{٤^2 + ٦^2 - ٨^2}{٢ \times ٤ \times ٦} = \frac{-١}{٤}$

فى △ ا ب جـ : جتا (ب) = $\frac{١}{٤}$ لأنهما متكاملتان

∴ ن² = ا² + هـ² − ٢ ا هـ جتا ب

(ا جـ)² = ٤² + ٦² − ٢ × ٤ × ٦ × $\frac{١}{٤}$

= ٤٠

∴ ا جـ = $\sqrt{٤٠}$ = ٦,٣ سم

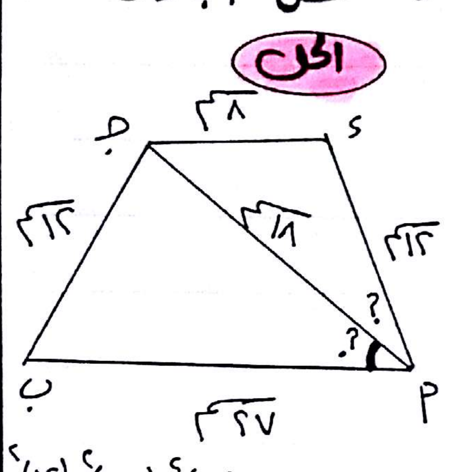
"اللهم صل وسلم على سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه وسلم"

مثال ٧

ا ب جـ ء شكل رباعى فيه ا ب = ٢٧ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، جـ ء = ٨ سم ، ء ا = ١٢ سم ، ا جـ = ١٨ سم

اثبت أن $\overrightarrow{\text{ا جـ}}$ ينصف (ب $\hat{\text{ا}}$ ء) ثم أوجد مساحة الشكل ا ب جـ ء

الحل



أولاً:

فى △ ا ب جـ : جتا (جـ $\hat{\text{ا}}$ ب) = $\frac{(١٨)^2 + (٢٧)^2 - (١٢)^2}{٢ \times ١٨ \times ٢٧}$

= $\frac{١٠١}{١٠٨}$ ∴ ق (جـ $\hat{\text{ا}}$ ب) = ٢٠° ٤٥َ ⟵ ①

فى △ ا ء جـ : جتا (ء $\hat{\text{ا}}$ جـ) = $\frac{(١٢)^2 + (١٨)^2 - (٨)^2}{٢ \times ١٢ \times ١٨}$

= $\frac{١٠١}{١٠٨}$ ∴ ق (ء $\hat{\text{ا}}$ جـ) = ٢٠° ٤٥َ ⟵ ②

من ① ، ② ∴ $\overrightarrow{\text{ا جـ}}$ ينصف (ب $\hat{\text{ا}}$ ء)

ثانياً:

مساحة الشكل ا ب جـ ء = م △ ا ب جـ + م △ ا ء جـ

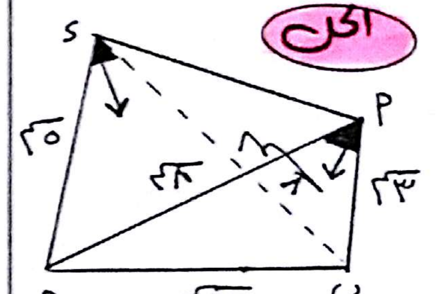
= $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٢٧ × جا ٢٠° ٤٥َ + $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٨ × جا ٢٠° ٤٥َ

= ١٢٤ سم²

مثال ٨

أ ب ج د شكل رباعي فيه أ ب = ٣ سم ، ب ج = ٧ سم ، ج د = ٥ سم ، أ ج = ب د = ٨ سم. أثبت أن أ ب ج د رباعي دائري.

الحل



* في △ ب أ ج

$$\text{جتا}(ب\hat{أ}ج) = \frac{(٣)^٢ + (٨)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٣ \times ٨} = \frac{١}{٢}$$

∴ $ق(ب\hat{أ}ج) = ٦٠^\circ$ ← ①

* في △ ب د ج

$$\text{جتا}(ب\hat{د}ج) = \frac{(٨)^٢ + (٥)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٨ \times ٥} = \frac{١}{٢}$$

∴ $ق(ب\hat{د}ج) = ٦٠^\circ$ ← ②

∴ $ق(ب\hat{أ}ج) = ق(ب\hat{د}ج)$ وهما زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري.

مثال ٩

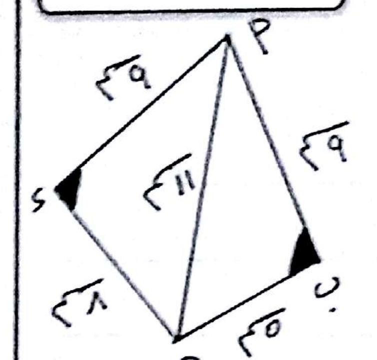
أ ب ج د شكل رباعي فيه أ ب = أ د = ٩ سم ، ب ج = ٥ سم ، ج د = ٨ سم ، أ ج = ١١ سم. أثبت أن الشكل أ ب ج د رباعي دائري.

الحل

* في △ أ ب ج :

$$\text{جتا}(ب) = \frac{٩^٢ + ٥^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٥} = \frac{-١}{٦}$$

* وفي △ أ د ج :



$$\text{جتا}(\hat{د}) = \frac{٩^٢ + ٨^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٨} = \frac{١}{٦}$$

∵ جتا(ب) = − جتا د

∴ $ق(\hat{ب}) + ق(\hat{د}) = ١٨٠^\circ$

وهما زاويتان متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري #

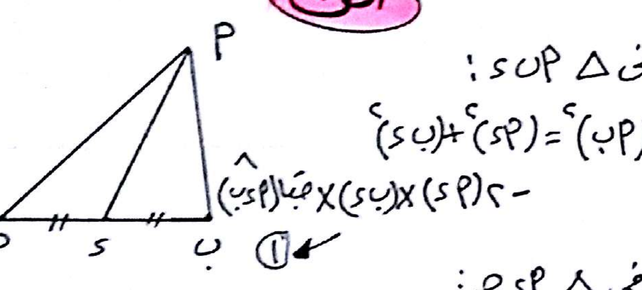
مثال ١٠

△ أ ب ج فيه د منتصف $\overline{ب ج}$ أثبت أن

$(أب)^٢ + (أج)^٢ = ٢(أد)^٢ + ٢(ب د)^٢$

وإذا كان أ ب = ٥ سم ، أ ج = ٨ سم ، ب ج = ١٢ سم أوجد أ د

الحل



* في △ أ ب د :

$(أب)^٢ = (أد)^٢ + (ب د)^٢ - ٢(أد) \times (ب د) \times \text{جتا}(أ\hat{د}ب)$ ← ①

* في △ أ د ج :

$(أج)^٢ = (أد)^٢ + (د ج)^٢ - ٢(أد) \times (د ج) \times \text{جتا}(أ\hat{د}ج)$ ← ②

∵ ب د = د ج

، جتا(أ د ب) = − جتا(أ د ج) متكاملتان

∴ بجمع ① ، ②

$(أب)^٢ + (أج)^٢ = ٢(أد)^٢ + ٢(ب د)^٢$ # أولاً

$\because (5)^2 + (8)^2 = 2(أد)^2 + 2(6)^2$

$89 = 2(أد)^2 + 72$

$2(أد)^2 = 89 - 72 = 17$

$(أد)^2 = \frac{17}{2}$

$\therefore أد = \sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{\sqrt{34}}{2} \simeq 2.9$ سم

مثال ١١

أ ب جـ مثلث محيطه ٧٠ سم ، $\acute{أ} = 26$ سم ، ق$(\hat{أ}) = 60°$ أوجد مساحة سطحه.

الحل

$\because$ محيط المثلث = ٧٠ سم ، $\acute{أ} = 26$

$\therefore \acute{أ} + \acute{ب} + \acute{جـ} = 70$ سم

$\therefore \acute{ب} + \acute{جـ} = 70 - 26 = 44$ سم

نفرض أن $\acute{ب} = س$

$\therefore \acute{جـ} = 44 - س$

(أ ، ب ، جـ ، ٦٠° ، س ، ٤٤ − س ، ٢٦ سم)

$\because \acute{أ}^2 = \acute{ب}^2 + \acute{جـ}^2 - 2\acute{ب}\acute{جـ}$ جتا أ

$(26)^2 = س^2 + (44-س)^2 - 2س(44-س)$ جتا $60°$

بعد التجميع

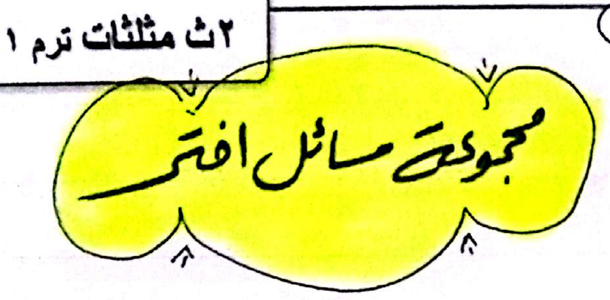
$س^2 - 44س + 420 = 0$

حل بالآلة

$\therefore س = 30$ أو 14

$\therefore$ مساحة $\triangle$ أ ب جـ $= \frac{1}{2}\acute{ب}\acute{جـ}$ جا أ

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 14 \times$ جا $60° = 181.8$ سم²



مثال ١٢

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

١ في $\triangle$ س ص ع المقدار $\frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2 س ص} = \ldots\ldots$

(جتا س ، جتا ص ، **جتا ع** ، جا ع)

٢ في $\triangle$ س ص ع يكون

$ص^2 + ع^2 - س^2 = 2 ص ع \times \ldots\ldots$

(**جتا س** ، جا ع ، جتا ع ، جا س)

٣ في $\triangle$ س ص ع إذا كان س = ص

فإن جتا س = ...

($\frac{2ص^2}{ع}$ ، $\mathbf{\frac{ع}{2ص}}$ ، $\frac{ع}{4س}$ ، $\frac{ص}{2س}$)

جتا س $= \frac{ص^2 + ع^2 - س^2}{2 ص ع} = \frac{ع^2}{2 ص ع} = \frac{ع}{2ص}$

٤ في $\triangle$ أ ب جـ جتا(أ+ب) = ...

الحل

جتا(أ+ب) = − جتا جـ $= -\left[\frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2}{2 أ ب}\right]$

$= \frac{-أ^2 - ب^2 + جـ^2}{2 أ ب} = \frac{جـ^2 - أ^2 - ب^2}{2 أ ب}$

الواجب

السؤال الأول: أكمل الجمل التالية

(١) $ق^2$ = ... جتا ق = ...

(٢) قياس أكبر زاوية في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٦ ، ١٠ ، ١٤ سم = ...

(٣) في △ س ص ع المقدار $\frac{س^2 + ع^2 - ص^2}{2 س ع}$ = ...

(٤) في △ ق ب جـ جتا (ق + ب) = ...

(٥) في △ ق ب جـ ق (ب جتا جـ + جـ جتا ب) = ...

(٦) في △ س ص ع س = ٨ سم ، ص = ٢٠ ، جتا ع = ٤ ، ٠ فإن ع = ...

السؤال الثاني: أجب عما يلي مع ذكر المقدمات والحل

(١) △ س ص ع فيه ق(ع) = ٩٠° ، س = ١٣ سم ، ص = ١٦ سم أوجد ع

(٢) △ ق ب جـ فيه ق = ٤ سم ، ب = ٦ سم ، ق(جـ) = ٥٧° أوجد محيط △ ق ب جـ

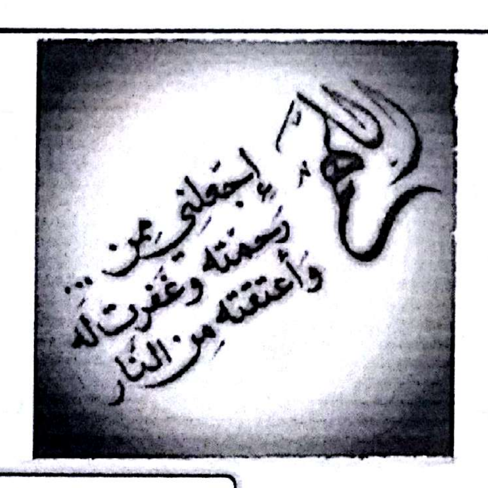
(٣) أوجد قياس أكبر زوايا المثلث س ص ع الذي فيه س = ٣ سم ، ص = ٦ سم ، ع = ٧ سم

(٤) أوجد قياسات زوايا △ ق ب جـ الذي فيه ق = ٦,٧ سم ، ب = ٥,٨ سم ، جـ = ٤,٣ سم

(٥) △ ق ب جـ فيه ق = ٤ سم ، ب = ٥ سم ، جتا جـ = $\frac{1}{2}$ أوجد جـ ومساحة △

(٦) ق ب جـ د متوازي أضلاع فيه ق د = ١٦ سم ، د ب = ٢٠ سم ، ق(∠ق ب جـ) = ٥٠° أوجد ق ب ، ق جـ لأقرب سم

(٧) ق ب جـ د شكل رباعي فيه ق ب = ٩ سم ، ب جـ = ٥ سم ، جـ د = ٨ سم ، د ق = ٩ سم ، ق جـ = ١١ سم اثبت أن الشكل ق ب جـ د رباعي دائري.



الدرس الثالث
حل المثلث

المقصود بحل المثلث
هو إيجاد أطوال الأضلاع الثلاثة
وقياسات الزوايا الثلاثة

الحالة الأولى

زاويتين وضلع ← قاعدة الجيب

مثال ١

حل المثلث ل م ن الذي فيه
مَ = ١٧ سم ، ق(ل̂) = ٣٣° ١٦َ
، ق(ن̂) = ٤٤° ١٩َ

الحل

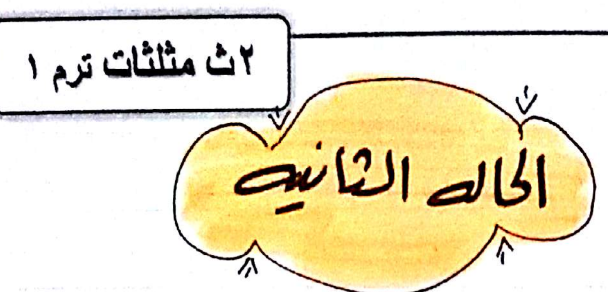
ق(م̂) = ١٨٠° − (٣٣° ١٦َ + ٤٤° ١٩َ)
= ١٠٢° ٢٥َ

∵ لَ / جا ل = مَ / جا م = نَ / جا ن

لَ / جا ٣٣° ١٦َ = ١٧ / جا ١٠٢° ٢٥َ = نَ / جا ٤٤° ١٩َ

∴ لَ = ١٧ جا ٣٣° ١٦َ / جا ١٠٢° ٢٥َ ≃ ٩,٥ سم

نَ = ١٧ جا ٤٤° ١٩َ / جا ١٠٢° ٢٥َ ≃ ١٢,٢ سم



ضلعين وزاوية محصورة ← جيب التمام
أَ ، بَ ، ق(جـ̂)

مثال ٢

حل المثلث أ ب جـ الذي فيه
أَ = ٨ سم ، بَ = ٥ سم
ق(جـ̂) = ٦٠° ٢َ

الحل

جـَ² = أَ² + بَ² − ٢ أَ بَ جتا جـ
= (٨)² + (٥)² − ٢×٨×٥ جتا ٦٠° ٢َ
= ٤٩,٠٤ ∴ جـَ = ٧ سم

جتا أ = (بَ² + جـَ² − أَ²) / (٢ بَ جـَ) = (٥² + ٧² − ٨²) / (٢×٥×٧)
= ١/٧

∴ ق(أ̂) ≃ ٨١° ٤٧َ

∴ ق(ب̂) = ١٨٠ − (٦٠° ٢َ + ٨١° ٤٧َ)
= ٣٨° ١١َ

ملحوظة هامة

* أي مثلث لا يمكنه أن يحتوي على أكثر من زاوية قائمة أو منفرجة

الحالة الثالثة

أطوال الأضلاع الثلاثة معلومة بالتمام

مثال ٣

حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أ = ٥ سم ، ب = ٢جـ = ٨ سم

الحل

أ = ٥سم ، ب = ٨سم

٢جـ = ٨سم ∴ جـ = ٤سم

جتا أ = $\frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{٢ ب جـ} = \frac{٨^2 + ٤^2 - ٥^2}{٢ \times ٨ \times ٤} = \frac{٥٥}{٦٤}$

∴ ق(أ) = ٣٠° ٤٥َ

جتا ب = $\frac{أ^2 + جـ^2 - ب^2}{٢ أ جـ} = \frac{٥^2 + ٤^2 - ٨^2}{٢ \times ٥ \times ٤} = \frac{-٢٣}{٤٠}$

∴ ق(ب) = ١٢٥° ٦َ

∴ ق(جـ) = ١٨٠° − (٣٠° ٤٥َ + ١٢٥° ٦َ)

= ٢٤° ٩َ

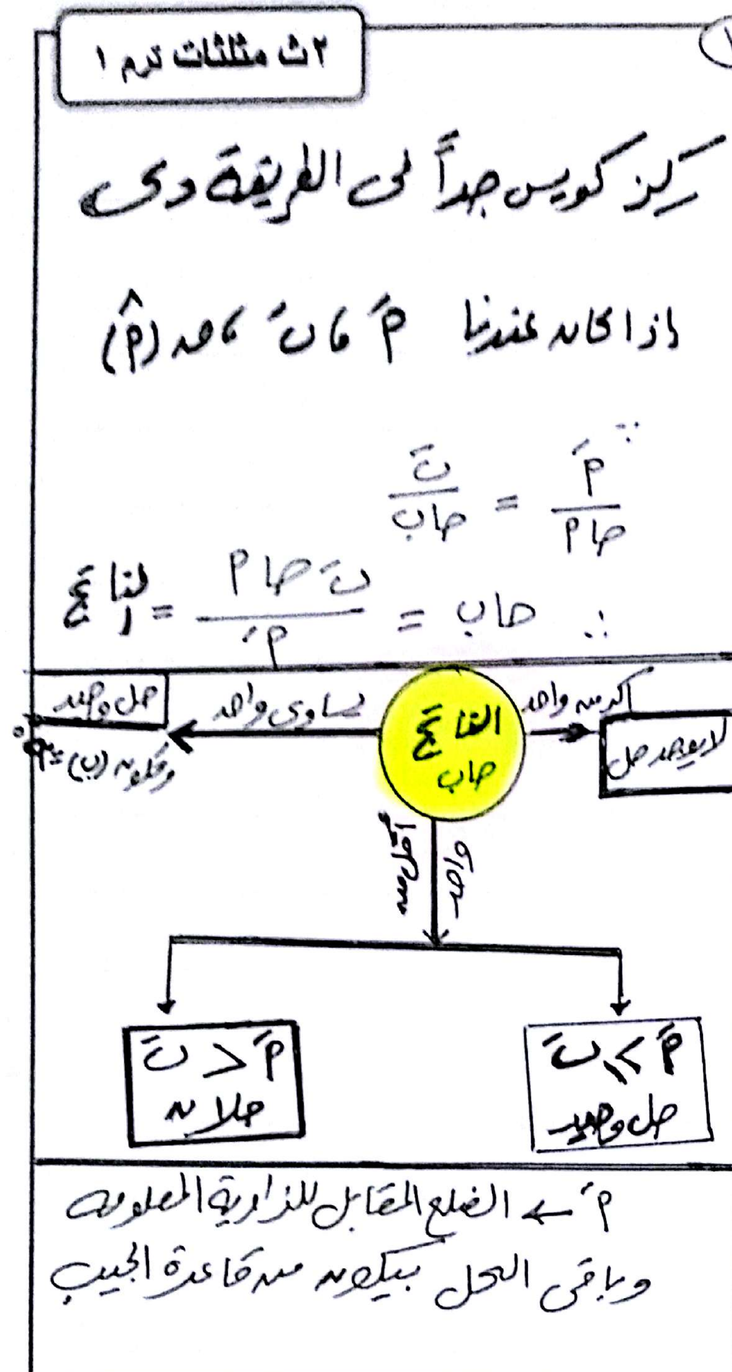
الحالة الرابعة

علمي فقط

الحالة المبهمة

ضلعين وزاوية مقابلة لأحدهما

أ ، ب ، ق(أ)



أ ← الضلع المقابل للزاوية المعلومة

وباقي الحل بيكون من قاعدة الجيب

مثال ٤

بين عدد الحلول ثم حل كلاً من المثلثات التالية

(١) △ أ ب جـ فيه ق(أ) = ١١٢° ، أ = ٤سم ، ب = ٧سم

الحل

$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب}$ ، $\frac{٤}{جا ١١٢} = \frac{٧}{جا ب}$

جا ب = $\frac{٧ جا ١١٢}{٤}$ ≃ ١,٦ ∴ لا يوجد حل

٢ △ أ ب جـ فيه أ = ٧,٥ سم ، ب = ٧,٥√٣ سم ، ق(أ^) = ٦٠°

الحل

أ / جا أ = ب / جا ب ⇐ ٧,٥ / جا ٦٠° = ٧,٥√٣ / جا ب

جا ب = (٧,٥√٣ × جا ٦٠°) / ٧,٥ = ١

∴ يوجد حل وحيد ابن القرموطي

* وتكون ق(ب^) = ٩٠°

⇐ ق(جـ^) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°) = ٣٠°

أ / جا أ = ب / جا ب = جـ / جا جـ

جـ / جا ٣٠° = ٧,٥ / جا ٦٠°

∴ جـ = ٧,٥ جا ٣٠° / جا ٦٠° ≃ ٤,٣ سم

٣ △ أ ب جـ فيه ق(أ^) = ٤٠° ، أ = ٨,٥ سم ، ب = ٧ سم

الحل

أ / جا أ = ب / جا ب ⇐ ٨,٥ / جا ٤٠° = ٧ / جا ب

جا ب = ٧ جا ٤٠° / ٨,٥ = ٠,٥٢

يعني أصغر من ١

يبقى عندي احتمالين

إذا كانت أ > ب يبقى حل واحد

أ < ب يبقى حلان

في المثال بتاعنا ٨,٥ > ٧

أ > ب ∴ يوجد حل وحيد

∴ ق(ب^) نعمل shift sin

ق(ب^) ≃ ٣٢°

، ق(جـ^) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٢°)

= ١٠٨°

أ / جا أ = جـ / جا جـ ⇐ ٨,٥ / جا ٤٠° = جـ / جا ١٠٨°

∴ جـ = ٨,٥ جا ١٠٨° / جا ٤٠° ≃ ١٢,٥٨ سم

٤ △ أ ب جـ فيه ق(أ^) = ٣٠°

أ = ٦ سم ، ب = ٩ سم

الحل

أ / جا أ = ب / جا ب ⇐ ٦ / جا ٣٠° = ٩ / جا ب

جا ب = ٩ جا ٣٠° / ٦ ≃ ٠,٧٥ < ١

نبدأ ننظر للضلع المقابل للزاوية المعلومة

أ < ب ∴ يوجد حلان

* ق(ب^) = ٤٨° ٣٥َ
* ق(جـ^) = ١٨٠° − [٣٠° + ٤٨° ٣٥َ] = ١٠١° ٢٥َ
* جـ / جا ١٠١° ٢٥َ = ٦ / جا ٣٠°

∴ جـ = ١١,٧٦ سم

ق(أ^) = ٣٠°

* ق(ب^) = ١٨٠° − ٤٨° ٣٥َ = ١٣١° ٢٥َ
* ق(جـ^) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٣١° ٢٥َ) = ١٨° ٣٥َ
* جـ / جا ١٨° ٣٥َ = ٦ / جا ٣٠°

جـ = ٣,٨٣ سم

مجموعة مسائل بأفكار متنوعة

٥ حل Δ أ ب جـ المتساوي الساقين الذي فيه ق(أ^) = ١١٠°، أ = ٨ سم

الحل

الفكرة Δ المتساوي الساقين بيكون زوايا القاعدة متساوية طيب وأنا أعرفهم منين زوايا القاعدة بتكون حادة

∴ (أ^) دي زاوية الرأس

∴ ق(ب^) = ق(جـ^) = $\frac{١٨٠ - ١١٠}{٢}$ = ٣٥°

$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$

$\frac{٨}{جا ١١٠°} = \frac{ب}{جا ٣٥} = \frac{جـ}{جا ٣٥}$

∴ ب = جـ = $\frac{٨ جا ٣٥°}{جا ١١٠°}$ = ٤٫٩ سم

٦ أ = ٢١ سم، جتا ب = $\frac{٣}{٥}$، ظا جـ = $\frac{٥}{١٢}$

الحل

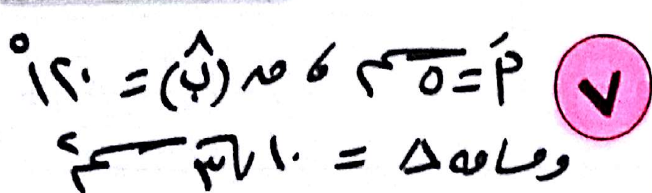
ق(ب^) ⇐ هتعمل shift cos

∴ ق(ب^) ≃ ٥٣° ٨′

ق(جـ^) = ٢٢° ٣٧′ shift tan

وتكمل انت بقاعدة الجيب

٧ أ = ٥ سم، ق(ب^) = ١٢٠°، ومساحة Δ = ١٠√٣ سم²



الحل

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ أ × جـ × جا ب

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٥ × جـ × جا ١٢٠° = ١٠√٣

∴ جـ = ٨ سم

أصبح عندك أ، جـ، ق(ب^) استخدم جيب التمام

٨ Δ أ ب جـ فيه ق(أ^) : ق(ب^) : ق(جـ^) = ٤ : ٥ : ٦ ومحيطه = ٥٠ سم

الحل

ق(أ^) = ٤س، ق(ب^) = ٥س

ق(جـ^) = ٦س

∴ ٤س + ٥س + ٦س = ١٨٠

١٥س = ١٨٠ ∴ س = ١٢

∴ ق(أ^) = ٤٨°، ق(ب^) = ٦٠°

ق(جـ^) = ٧٢°

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = \frac{المحيط}{جا أ + جا ب + جا جـ}$

$\frac{أ}{جا ٤٨} = \frac{ب}{جا ٦٠°} = \frac{جـ}{جا ٧٢°} = \frac{٥٠}{جا ٤٨° + جا ٦٠° + جا ٧٢°}$

∴ أ ≃ ١٤٫٥ سم

ب ≃ ١٦٫٩ سم

جـ ≃ ١٨٫٦ سم

٩ △ ا ب جـ فيه جا ا : جا ب : جا جـ = ٣ : ٤ : ٦ ومحيطه = ٥٢ سم

الحل

ا : ب : جـ = ٣ : ٤ : ٦

ا = ٣ل ، ب = ٤ل ، جـ = ٦ل

٣ل + ٤ل + ٦ل = ٥٢

١٣ل = ٥٢ ∴ ل = ٤

∴ ا = ١٢ سم ، ب = ١٦ سم ، جـ = ٢٤ سم

ونكمل بقاعدة جيب التمام

---

١٠ △ ا ب جـ الحاد الزوايا فيه ا = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٨ سم

الحل

ا / جا ا = ب / جا ب = جـ / جا جـ = ٢نق

٢١ / جا ا = ٢٥ / جا ب = جـ / جا جـ = ٢٨ / ١

جا ا = ٢١ / ٢٨ ∴ ق(ا) = ٤٨° ١٣َ

جا ب = ٢٥ / ٢٨ ∴ ق(ب) = ٦٣° ١٤َ

∴ ق(جـ) = ١٨٠ − (٤٨° ١٣َ + ٦٣° ١٤َ)

= ٦٨° ١١َ

∴ جـ = ٢٨ جا ٦٨° ١١َ ≃ ٢٦ سم

---

١١ △ ا ب جـ فيه ق(ا) = ٣٥° ، ق(ب) = ٧٥° ، ا + ٣جـ = ٢٥ سم

الحل

ق(جـ) = ١٨٠ − (٣٥° + ٧٥°) = ٧٠°

ا / جا ٣٥° = ب / جا ٧٥° = جـ / جا ٧٠° = (ا + ٣جـ) / (جا ٣٥° + ٣جا ٧٠°)

∴ ا = ٢٥ جا ٣٥° / (جا ٣٥° + ٣جا ٧٠°) ≃ ٤,٢ سم

ب = ٧,١ سم

جـ = ٦,٩ سم

---

١٢ △ ا ب جـ فيه ا = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(ا) = ٤٠° أوجد ق(ب)

الحل

دي حالة مبهمة فاكر الخطوات؟

ا / جا ا = ب / جا ب ⟸ ٥ / جا ٤٠° = ٧ / جا ب

جا ب = ٧ جا ٤٠° / ٥ ≃ ٠,٨٩ (يعني أصغر من الواحد)

نلاحظ أن ا < ب ∴ يوجد حلان

ق(ب) = ٦٤° ٨َ ٤٣ً

أو ق(ب) = ١٨٠° − (٦٤° ٨َ ٤٣ً)

= ١١٥° ٥١َ ٧ً

من النموذج الأول

١٣

△ أ ب جـ فيه أ ب = ١٥ سم ، ب جـ = ٢٠ سم ، جـ أ = ١٢ سم

أوجد محيط △ أ ب جـ

الحل

بضرب الثلاثة أطراف

أ ب × ب جـ × جـ أ = ١٥ × ٢٠ × ١٢

$(أ\ ب\ جـ)^2 = ٣٦٠٠$ بالجذر

∴ أ ب جـ = ٦٠

∵ أ ب = ١٥

∴ ١٥ جـ = ٦٠ ∴ جـ = ٤ سم

، ∵ ب جـ = ٢٠ ∴ ب = ٥ سم

، ∵ أ ب = ١٥ أ = ٣ سم

∴ محيط △ أ ب جـ = أ + ب + جـ = ١٢ سم

١٤

في △ أ ب جـ يكون أ (ب جتا جـ + جـ جتا ب) = ...

الحل

$$أ\left[ب \times \frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2}{2\,أ\,ب} + جـ \times \frac{أ^2 + جـ^2 - ب^2}{2\,أ\,جـ}\right]$$

$$= أ\left[\frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2 + أ^2 + جـ^2 - ب^2}{2\,أ}\right]$$

$$= أ\left[\frac{2\,أ^2}{2\,أ}\right] = أ^2$$

١٥

خماسي منتظم محيطه = ٣٠ سم أوجد مساحة سطحه

الحل

طول الضلع = $\frac{\text{المحيط}}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ سم

مساحة المضلع المنتظم = $\frac{1}{4}$ ن $س^2$ ظتا $\frac{\pi}{ن}$

$= \frac{1}{4} \times ٥ \times (٦)^2 \times \frac{1}{ظا(\frac{١٨٠}{٥})} \simeq ٦٢$ سم²

١٦

حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أ = ٣ سم ، ب = ٤ سم ، جـ = ٨ سم

الحل

من متباينة المثلث

مجموع أي ضلعين > من الضلع الثالث

ولكن أ + ب < جـ

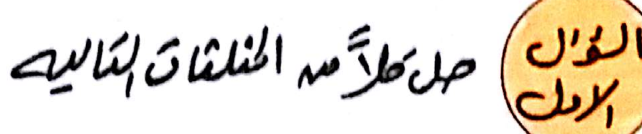
∴ لا يمكن حل المثلث

ولو مش مصدقني أرسمه

* إذا أخذ الله منك ما لم تتوقع خسارته فسوف يعطيك ما لم تتوقع أن تملكه

* لا تقل يا رب عندي هم كبير ولكن قل يا هم عندي رب كبير





حل كلاً من المثلثات التالية

1. أ = ٨ سم ، ق(أ) = ٦٠° ، ق(ب) = ٤٠°
2. أب = ٩ سم ، ق(أ) = ٢ق(ب) = ٨٠°
3. أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(جـ) = ٦٥°
4. ل م = ٤٨,٥ سم ، م ن = ٤٦ سم ، جتا م = -٠,٦
5. أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، جـ = ١٥ سم
6. س ص = ١٥ سم ، ص ع = ٢٥ سم ، س ع = ٣٠ سم



بين عدد الحلول ثم حل إن أمكن

1. أ = ١٢ سم ، ب = ١٥ سم ، ق(أ) = ١٠٠°
2. أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(أ) = ٦٠°
3. أ = ٤√٣ سم ، ب = ٦ سم ، ق(ب) = ٦٠°
4. أ = ٤ سم ، ب = ٣ سم ، ق(أ) = ٥٠°
5. أ = ١٢ سم ، جـ = ٧ سم ، ق(أ) = ٢٧°
6. أ = ١٠ سم ، ب = ٩ سم ، ق(ب) = ٥٧°
7. أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ق(أ) = ٤٧°
8. س = ٥ سم ، ص = ٧ سم ، ع = ٦ سم

السؤال الثالث

حل المسائل دى كمان

1. أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه ق(أ) = ١٢٠° ، أ = ٣√٧ حل المثلث
2. حل △ أ ب جـ الحاد الزوايا الذى فيه أ = ١٨ سم ، ب = ١٤ سم وطول قطر الدائرة الخارجية = ٢٠ سم
3. أ = ٥ سم ، ق(جـ) = ١٢٠° ومساحته ٨√٣ سم²

الله انتهى منهج الفصل الدراسى الأول

اسأل الله العظيم رب العرش الكريم أن يوفقكم جميعاً وان يكتب لكم النجاح والفلاح فى الدنيا والآخرة

وفى النهاية لا تنسونى من دعوة صادقة

محمد أدهم